Alternativna definicija limesa funkcije

Ozren Perše, Ana Zeman

Sadržaj

Sažetak

U ovom preglednom radu prezentiramo alternativnu definiciju limesa funkcije, danu u radu B.M. Baishanski, arXiv:0805.3671. Pokazujemo da osnovna svojstva limesa funkcije lagano slijede iz te definicije, te da je ta definicija ekvivalentna tradicionalnoj „$\epsilon - \delta$" definiciji.

1 Uvod

Tradicionalna „$\epsilon - \delta$" definicija limesa realne funkcije jedne realne varijable (vidi npr. [2], [3]) dosta je apstraktna za mnoge studente koji se prvi put s njom susreću. Iz tog se razloga u radu [1] predlaže alternativna definicija limesa funkcije, koja bi trebala biti intuitivnija za početnike. Naime, autor tog članka mišljenja je da je jednostavnije geometrijski interpretirati Definicije 2.1 i 3.1 (navedene u ovom radu) nego tradicionalnu „$\epsilon - \delta$" definiciju. Alternativna definicija limesa funkcije dobiva se kombinacijom dviju dobro poznatih činjenica, koje su u sadašnjoj aksiomatici jednostavne posljedice tradicionalne „$\epsilon - \delta$" definicije (vidi Definiciju 2.1). Jedna od tih činjenica (svojstvo (2) iz Definicije 2.1) u novoj aksiomatici postaje fundamentalno svojstvo limesa funkcije.

U ovom radu promatramo realne funkcije realne varijable i, slijedeći [1], definiramo $\lim f(x)$ kada x teži ∞. Potpuno analogno može se definirati

$\lim f(x)$ kada x teži $c+$ i $c-$, za $c \in \mathbb{R}$, te kada x teži $-\infty$. Također, uz manje modifikacije, moguće je dati i definiciju beskonačnog limesa (tj. $\lim f(x) = \pm\infty$).

Limes funkcije možemo shvatiti kao preslikavanje s klase realnih funkcija u realne brojeve. Slijedeći [1], definiramo to preslikavanje i maksimalnu klasu funkcija na kojoj je to preslikavanje definirano, tako da je osnovno svojstvo limesa (svojstvo (2) iz Definicije 2.1) zadovoljeno. To radimo u tri koraka:

1) definiramo limes za monotone ograničene funkcije,

2) definiramo klasu konvergentnih funkcija (tj. dajemo novo značenje pojmu konvergencije - kasnije pokazujemo da se podudara s tradicionalnim pojmom konvergencije (vidi teoreme 3.9 i 3.10)),

3) proširujemo definiciju limesa na sve konvergentne funkcije.

Nadalje, pokazujemo da iz te definicije limesa jednostavno slijede uobičajena svojstva limesa (teorem 3.8), te da je ova definicija limesa ekvivalentna tradicionalnoj „$\epsilon - \delta$" definiciji (teoremi 3.9 i 3.10).

Za $a \in \mathbb{R}$, u ovom radu s (a, ∞) označujemo otvoreni interval $\{x \in \mathbb{R} | \ x > a\}$.

2 Limes monotonih i ograničenih funkcija

U ovom poglavlju promatramo klasu funkcija koje su monotone i ograničene na nekoj okolini beskonačnosti:

$$BM(\infty) = \{f | \text{ postoji } a \in \mathbb{R} \text{ takav da je } f \text{ monotona i ograničena na intervalu } (a, \infty)\}$$

i definiramo pojam limesa na toj klasi.

Definicija 2.1. *Kažemo da je preslikavanje*

$$L : BM(\infty) \to \mathbb{R}$$

limes *na $BM(\infty)$ ako su zadovoljena sljedeća svojstva:*

(1) ako je $f(x) = c$ za sve $x \in \mathbb{R}$, tada $L(f) = c$,

(2) ako je $L(f) < L(g)$, tada postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f(x) < g(x) \text{ za } x > a.$$

Umjesto $L(f) = \lambda$, često ćemo se koristiti uobičajenom notacijom „$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$" ili „$f(x) \to \lambda$ kada $x \to \infty$". Ako je f rastuća (odnosno padajuća), pišemo $f(x) \nearrow \lambda$ kada $x \to \infty$ (odnosno $f(x) \searrow \lambda$ kada $x \to \infty$).

Sada pokazujemo da postoji jedinstveno preslikavanje sa svojstvima iz Definicije 2.1.

Teorem 2.2. *Postoji limes L na $BM(\infty)$.*

Dokaz. Ako je f rastuća i ograničena za $x > a$, definiramo $L(f) = \sup\{f(x) | \, x > a\}$, a ako je f padajuća i ograničena za $x > a$, definiramo $L(f) = \inf\{f(x) | \, x > a\}$. Očito, trebamo samo provjeriti je li zadovoljen uvjet (2) iz Definicije 2.1. Postoje četiri slučaja s obzirom na to jesu li funkcije f i g rastuće ili padajuće. Dokaz dajemo samo za slučaj kada je f padajuća za $x > a'$ i g rastuća za $x > a''$ (preostala tri slučaja su slična). Neka je $\gamma \in \mathbb{R}$ takav da je $L(f) < \gamma < L(g)$. Budući da je $L(f) = \inf\{f(x) | \; x > a'\}$, $L(g) = \sup\{g(x) | \; x > a''\}$, dobivamo da postoje b' i b'' iz $\mathbb{R}$ takvi da $f(b') < \gamma < g(b'')$. Budući da je f padajuća, a g rastuća, slijedi da je $f(x) < g(x)$ za $x > \max\{b', b''\}$. □

Teorem 2.3. *Limes L na $BM(\infty)$ je jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dva limesa, L' i L'', te funkcija f iz $BM(\infty)$ takva da je $L'(f)$ različit od $L''(f)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $L'(f) < L''(f)$. Neka je $\gamma \in \mathbb{R}$ takav da je

$$L'(f) < \gamma < L''(f). \tag{1}$$

Ako označimo s γ i konstantnu funkciju s vrijednosti γ, iz svojstva (1) iz Definicije 2.1 slijedi da je $L'(\gamma) = L''(\gamma) = \gamma$. Sada relacija (1) povlači da je $L'(f) < L'(\gamma)$ i $L''(\gamma) < L''(f)$, pa iz svojstva (2) slijedi da postoje a' i a'' iz $\mathbb{R}$ takvi da je $f(x) < \gamma$ za $x > a'$ i $f(x) > \gamma$ za $x > a''$. Dakle, za $x > \max\{a', a''\}$, dobivamo $f(x) < f(x)$, što je kontradikcija. □

Teorem 2.4. *Ako su funkcije f i g iz klase $BM(\infty)$ i ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da*

$$f(x) \leq g(x) \text{ za } x > a, \text{ tada } L(f) \leq L(g).$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno $L(f) > L(g)$. Iz svojstva (2) iz Definicije 2.1 slijedi da postoji $a' \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) > g(x)$ za $x > a'$. Sada za $x > \max\{a, a'\}$ dobivamo kontradikciju. □

Teorem 2.5. *Neka je N pozitivna padajuća funkcija na (a, ∞). Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $L(N) = 0$

(ii) za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n > a$ takav da je $N(x_n) < 1/n$.

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii). Budući da je $L(N) < L(1/n)$ (pri čemu s $1/n$ označavamo pripadnu konstantnu funkciju), iz svojstva (2) iz Definicije 2.1 slijedi da postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $N(x) < 1/n$ za $x > c$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Budući da je N padajuća na (a, ∞), vrijedi $0 < N(x) < 1/n$ za $x > x_n$. Iz Teorema 2.4 i svojstva (1) dobivamo $0 \leq L(N) \leq 1/n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $L(N) = 0$. □

Tvrdnje sljedećeg korolara jednostavno slijede iz definicije limesa na klasi $BM(\infty)$, dane u dokazu Teorema 2.2:

Korolar 2.6. *Neka je $f(x) = \lambda + N(x)$, $g(x) = \lambda - N(x)$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $N(x) \searrow 0$,

(ii) $f(x) \searrow \lambda$,

(iii) $g(x) \nearrow \lambda$.

Tvrdnje sljedećeg korolara jednostavno slijede iz Teorema 2.5:

Korolar 2.7. *Pretpostavimo da $N'(x) \searrow 0, N''(x) \searrow 0$ kada $x \to \infty$. Tada vrijedi:*

(i) Ako je $N(x) = N'(x) + N''(x)$, tada $N(x) \searrow 0$ kada $x \to \infty$.

(ii) Ako je $N(x) = CN'(x)$, pri čemu je C pozitivna konstanta, tada $N(x) \searrow 0$ kada $x \to \infty$.

3 Konvergentne funkcije i limes

U ovom poglavlju uvodimo pojam limesa na širu klasu funkcija.

Definicija 3.1. *Kažemo da funkcija f* **konvergira** *kada x teži ∞ ako postoji $a \in \mathbb{R}$ i funkcije m i M, koje su ograničene i monotone na intervalu (a, ∞) i da vrijedi*

1. *f je definirana na (a, ∞)*
2. *$m(x) \leq f(x) \leq M(x)$, za $x > a$*
3. *$L(m) = L(M)$.*

Klasu funkcija f koje konvergiraju kada x teži ∞ označavamo s $C(\infty)$.

Napomena 3.2. *Iz Definicije 3.1 slijedi da je svaka konvergentna funkcija ujedno i ograničena na nekom intervalu (a, ∞).*

Teorem 3.3. *Limes L na $BM(\infty)$ može se proširiti na klasu $C(\infty)$, tako da svojstvo (2) iz Definicije 2.1 ostaje zadovoljeno.*

Dokaz. Ako je f iz klase $C(\infty)$, stavimo $L(f) = L(m) = L(M)$. Prvo moramo provjeriti je li ova definicija dobra, odnosno da, ako imamo funkcije m', M', m'', M'' iz klase $BM(\infty)$ takve da $m'(x) \leq f(x) \leq M'(x)$ za $x > a'$ i $m''(x) \leq f(x) \leq M''(x)$ za $x > a''$, te $L(m') = L(M') = L'$ i $L(m'') = L(M'') = L''$, onda vrijedi $L' = L''$. Iz gornjih pretpostavki slijedi da je $m'(x) \leq M''(x)$ za $x > \max\{a', a''\}$. Sada Teorem 2.4 povlači $L' = L(m') \leq L(M'') = L''$. Slično se pokazuje $L'' \leq L'$. Dakle, $L' = L''$.

Preostaje provjeriti je li svojstvo (2) iz Definicije 2.1 zadovoljeno na $C(\infty)$. Neka su sada m', M', m'', M'' iz klase $BM(\infty)$ takve da $m'(x) \leq f(x) \leq M'(x)$ za $x > a'$, $m''(x) \leq g(x) \leq M''(x)$ za $x > a''$, te $L(m') = L(M') = L(f)$ i $L(m'') = L(M'') = L(g)$. Budući da je $L(M') = L(f) < L(g) = L(m'')$, iz svojstva (2) za funkcije iz klase $BM(\infty)$ slijedi da postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je $M'(x) < m''(x)$ za $x > a$. Slijedi $f(x) \leq M'(x) < m''(x) \leq g(x)$ za $x > \max\{a, a', a''\}$. □

Vrijede sljedeća poopćenja teorema 2.3 i 2.4 na klasu $C(\infty)$:

Teorem 3.4. *Limes L na $C(\infty)$ je jedinstven.*

Teorem 3.5. *Ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$f(x) \leq g(x) \text{ za } x > a,$$

i ako f i g konvergiraju kada x teži ∞, tada

$$L(f) \leq L(g).$$

Dokazi teorema 3.4 i 3.5 identični su dokazima teorema 2.3 i 2.4.

Tvrdnje sljedećih lema jednostavno slijede iz Definicije 3.1 i odgovarajućih tvrdnji na klasi $BM(\infty)$ (korolari 2.6 i 2.7):

Lema 3.6. *a) Pretpostavimo da je $|f(x) - \lambda| < N(x)$ za $x > a$. Tada, ako $N(x) \searrow 0$ kada $x \to \infty$, onda $f(x) \to \lambda$ kada $x \to \infty$.*
b) Neka je $f(x) = \lambda + z(x)$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(i) $f(x) \to \lambda$ *kada* $x \to \infty$

(ii) $z(x) \to 0$ *kada* $x \to \infty$.

Lema 3.7. *(i) Ako $z'(x) \to 0, z''(x) \to 0$ kada $x \to \infty$ i $z(x) = z'(x) + z''(x)$, tada $z(x) \to 0$ kada $x \to \infty$.*
(ii) Ako $z(x) \to 0$ kada $x \to \infty$ i $w(x) = b(x)z(x)$, pri čemu je funkcija b ograničena na nekom intervalu (a, ∞), tada $w(x) \to 0$ kada $x \to \infty$.

U sljedećem teoremu navodimo uobičajena svojstva limesa s obzirom na zbrajanje, množenje i dijeljenje funkcija:

Teorem 3.8. *Pretpostavimo da $f(x) \to \alpha$ i $g(x) \to \beta$ kada $x \to \infty$. Neka je $s = f + g$, $p = fg$ i $q = 1/g$. Tada $s(x) \to \alpha + \beta$, $p(x) \to \alpha\beta$ kada $x \to \infty$. Ako je i $\beta \neq 0$, tada $q(x) \to 1/\beta$ kada $x \to \infty$.*

Dokaz. Slijedi iz lema 3.6 i 3.7. □

Teorem 3.9. *Pretpostavimo da f konvergira kada x teži ∞ i da je $L(f) = \lambda$. Tada vrijedi:*

(i) Ako je $\alpha < \lambda < \beta$, tada postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je $\alpha < f(x) < \beta$ za $x > a$,

(ii) Za svaki $\epsilon > 0$ postoji $X = X(\epsilon) \in \mathbb{R}$ takav da je

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon \text{ za } x > X.$$

Dokaz. (i) Kao i do sada, koristimo se istom oznakom za realan broj i za konstantnu funkciju čija je jedina vrijednost taj realan broj, dakle $L(\alpha) = \alpha$, $L(\beta) = \beta$. Pretpostavka je da

$$L(\alpha) < L(f) < L(\beta).$$

Koristeći se svojstvom (2) dobivamo

$$\alpha < f(x) \text{ za } x > a', f(x) < \beta \text{ za } x > a'',$$

pa tvrdnja (i) slijedi za $a = \max\{a', a''\}$.
(ii) Slijedi iz (i) za $\alpha = \lambda - \epsilon$, $\beta = \lambda + \epsilon$. □

Teorem 3.10. *Pretpostavimo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $X = X(\epsilon) \in \mathbb{R}$ takav da*

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon \text{ za } x > X. \tag{2}$$

Tada f konvergira kada x teži ∞ (u smislu Definicije 3.1) i $L(f) = \lambda$.

Dokaz. Moramo provjeriti jesu li zadovoljeni uvjeti Definicije 3.1. Neka je $M(x) = \sup\{f(t)|\ t \geq x\}$, $m(x) = \inf\{f(t)|\ t \geq x\}$. Lagano se pokazuje da su funkcije M i m iz klase $BM(\infty)$ i da je $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$, recimo za $x > X(1)$. Preostaje provjeriti je li $L(m) = L(M) = \lambda$. Pokazat ćemo da je $L(M) = \lambda$, analogno se pokazuje $L(m) = \lambda$.

Za proizvoljan $\epsilon > 0$, iz relacije (2) slijedi da je $\lambda - \epsilon < f(t) < \lambda + \epsilon$ za $t > X(\epsilon)$. Dakle, $\lambda - \epsilon \leq M(x) \leq \lambda + \epsilon$ za $x > X(\epsilon)$. Iz Teorema 2.4 sada slijedi da za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi $\lambda - \epsilon \leq L(M) \leq \lambda + \epsilon$. Odavde dobivamo $L(M) = \lambda$. □

Teoremi 3.9 i 3.10 pokazuju da je definicija limesa funkcije iz ovog rada ekvivalentna uobičajenoj definiciji limesa funkcije.

Literatura

[1] B. M. Baishanski, A more intuitive definition of limit, arXiv:0805.3671

[2] S. Kurepa, Matematička analiza 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[3] S. Kurepa, Matematička analiza 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.