Inverzija

Harun Šiljak

Sadržaj

Sažetak

Ovaj rad nastao je u želji da se mladim natjecateljima srednjoškolcima teorijski i praktično predstavi inverzija u planimetriji. Na samom početku dan je nešto opširniji teorijski uvod u kojem su pored dobro poznatih svojstava inverzije dani i dokazi tih svojstava. U nastavku je na nizu primjera ilustrirana njezina praktična primjena.

1 Uvod

Većina transformacija koje se primjenjuju u rješavanju planimetrijskih problema su izometrije. Nešto rjeđe primjenjuju se i homotetivne transformacije – no u svakom od tih preslikavanja pravac se preslikava u pravac, a kružnica u kružnicu (ili u elipsu, u općem slučaju afinih transformacija). No, kod inverzije nije takav slučaj. Inverzija, naime, preslikava pravce i kružnice u pravce i kružnice, ali pri tome može pravac transformirati u kružnicu i obrnuto. Ovo je jedan od razloga zašto inverzija ponekad daje neočekivane i zanimljive rezultate u svojoj primjeni.

Dajmo sada formalnu definiciju inverzije, a zatim protumačimo njezino praktično značenje.

Definicija 1.1. *Neka je O točka u ravnini E, a r pozitivan realan broj. Inverzijom ravnine E u odnosu na kružnicu $k(O,r)$ nazivamo preslikavanje koje svaku točku te ravnine P različitu od O preslikava u točku P' na polupravcu OP tako da vrijedi $OP \cdot OP' = r^2$. Točka O se pritom preslikava u točku u beskonačnosti.*[1]

[1] Ravnina E se preslikava, strogo govoreći, u tzv. inverzivnu ravninu I, euklidsku ravninu proširenu točkom u beskonačnosti ∞ (koja se smatra zajedničkom točkom svih pravaca te ravnine, pa, u krajnjem slučaju, i onih paralelnih). Primijetimo da proširivanjem polazne ravnine E točkom ∞ otvaramo mogućnost da se središte inverzione kružnice k nađe u toj točki,

Napomenimo da stariji autori izostavljaju posljednju rečenicu ove definicije, navodeći da se točka O inverzijom uopće ne preslikava (te, samim tim, osporavaju stajalište da je inverzija geometrijska transformacija u strogom smislu, vidjeti npr. [10]).

Kako su čitatelji upoznati s osnom refleksijom (zrcaljenjem ravnine u odnosu na zadani pravac), pokušat ćemo inverziju objasniti kroz ovo elementarno preslikavanje. Točnije, inverziju možemo smatrati generalizacijom osne refleksije: riječ je, naime, o refleksiji na kružnici. Pravac možemo promatrati kao luk kružnice beskonačnog polumjera, pa ova generalizacija ima smisla.[2] Zainteresirani čitatelj može relativno lako pokazati kako se praktično provodi ova generalizacija.

Iz definicije 1.1 direktno slijedi

Posljedica 1.2. *Inverzija ravnine u odnosu na kružnicu $k(O, r)$ točke na kružnici k preslikava u njih same, točke u unutrašnjosti kruga koji omeđuje ta kružnica u njegovu vanjštinu i obrnuto.*

Nije se teško uvjeriti da vrijedi i

Posljedica 1.3. *Inverzija je bijekcija i involucija.*[3]

Pokažimo kako konstruirati točku P' iz definicije 1.1, tj. kako naći inverz točke u odnosu na kružnicu. Ovim postupkom uvjeriti ćemo se i u istinitost posljedica 1.2 i 1.3.

1. Neka točka P leži na kružnici $k(O, r)$. Spojimo li ovu točku sa središtem inverzije O, očito je da na polupravcu OP postoji točno jedna točka P' koja ispunjava jednakost $OP \cdot OP' = r^2$, i to sama točka P. Dakle, $P' = P$.

2. Neka točka P leži izvan kružnice $k(O, r)$. Povucimo kroz točku P tangentu na kružnicu k (slika 1) i označimo dodirnu točku tangente i kružnice s M. Neka je MP' visina trokuta OMP. Iz sličnosti pravokutnih trokuta OMP i $OP'M$ slijedi $P'O : OM = OM : OP$, pa je $OP \cdot OP' = r^2$, te je P' slika točke P pri ovoj inverziji.

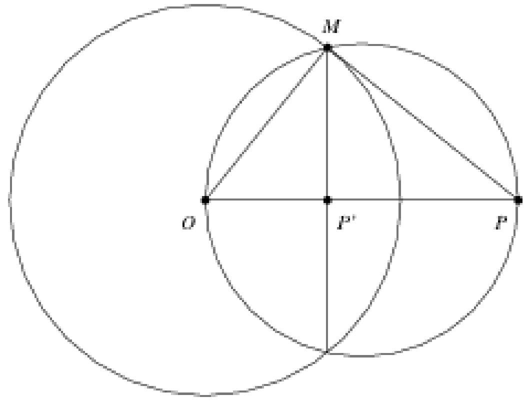
3. Neka točka P leži unutar kružnice $k(O, r)$. Primijenimo obrnut postupak onom u slučaju (2). Spojimo, dakle, točke O i P i povucimo okomicu na pravac OP kroz točku P. Jedan od presjeka tog pravca s kružnicom k označimo s M, kroz točku M povucimo tangentu na k i presjek te tangente i pravca OP označimo s P' (očito, riječ je o istoj slici kao u slučaju (2), sa zamijenjenim mjestima točaka P i P'). Iz identičnog razloga sličnosti kao pod (2) slijedi da je P' slika točke P pri ovoj inverziji.

---

pa se kružnica k pretvara u pravac, na čemu se zasniva i sljedeći dio našeg izlaganja. Također vrijedi spomenuti da više o uvođenju proširene euklidske ravnine putem tzv. stereografske projekcije zainteresirani čitatelji mogu naći u članku [8] te u [5].

[2] Kažu da je tako na ideju inverzije došao Apolonije iz Perge, u jednom od svojih izgubljenih djela (ta ideja vidi se i u teoremu o Apolonijevoj kružnici, vidi [1]). U novije doba, tek je Jacob Steiner u XIX. stoljeću pokazao pravu moć inverzije, iskoristivši je u svojim radovima za virtuozne dokaze nekih starih i postavljanje nekih novih teorema.

[3] To znači da je invertirana slika svake točke P' točka P, tj. $I(I(P)) = P$, gdje I označuje inverziju.



Slika 1: Inverzija je bijekcija i involucija.

Ovim smo direktno dokazali posljedicu 1.2. Posljedica 1.3 za točke na kružnici direktno slijedi iz (1), a za ostale slijedi iz činjenica da su točke P' u (2) i (3) jednoznačno određene (zbog simetrije, svejedno je koju ćemo od dviju mogućih tangenti povući u (2), ili koji ćemo presjek pravca i kružnice odabrati u (3)). Očita je involutivna veza između slučajeva (2) i (3), gdje točka P iz (2) odogovara točki P' iz (3) i obrnuto.

Sad ćemo dokazati nekoliko osnovnih svojstava inverzije, koja je čine moćnim sredstvom u modernoj planimetriji.

Teorem 1.4. *Ako je O centar inverzije, a točke A i B tom su inverzijom preslikane u A' i B', tada su trokuti OAB i $OB'A'$ slični.*

Dokaz. Iz definicije 1.1 slijedi: $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$, pa je $OA : OB = OB' : OA$, a budući da je $\angle AOB = \angle B'OA'$, trokuti OAB i $OB'A'$ su slični. □

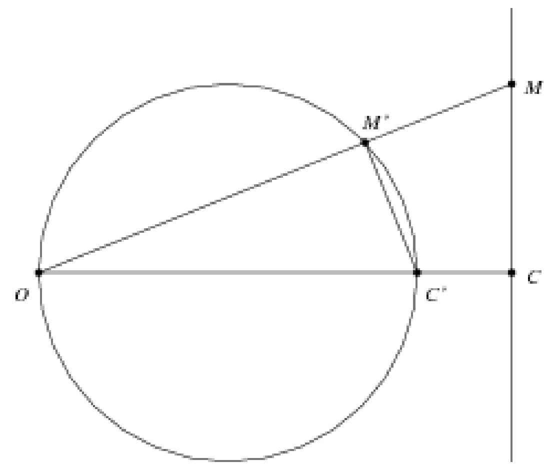
Teorem 1.5. *Ako je O centar inverzije, pravac p koji prolazi točkom O preslikava se u samog sebe.*[4]

Dokaz. Prema definiciji 1.1, svaka točka pravca p (osim O) se preslikava u točku na istom tom pravcu. Budući da je riječ o bijekciji, pravac p preslikava se u samog sebe. □

Teorem 1.6. *Ako je O centar inverzije, pravac p koji ne prolazi točkom O preslikava se u kružnicu koja prolazi točkom O.*

Dokaz. Spustimo normalu OC na pravac p iz centra inverzije O (slika 2) te odaberimo proizvoljnu točku M na p. Budući da su trokuti OCM i $OM'C'$ slični (teorem 1.4), kut $\angle OM'C'$ je pravi, pa po Talesovu teoremu točka M' leži na kružnici k promjera OC'. Ako je X točka kružnice k različita od O, tada je ona slika pri inverziji točke Y koja se nalazi u presjeku polupravca OX i p. Dakle, inverzija preslikava pravac p u kružnicu k (preciznije, $k \setminus \{O\}$). □

[4] Kad govorimo o krivulji q koja prolazi centrom inverzije O, mislimo na $q \setminus \{O\}$, zbog specifičnosti (ne)preslikavanja točke O.



Slika 2: Ako je O centar inverzije, pravac p koji ne prolazi točkom O preslikava se u kružnicu koja prolazi točkom O.

Teorem 1.7. *Ako je O centar inverzije, kružnica koja prolazi točkom O preslikava se u pravac, a kružnica koja ne prolazi točkom O u kružnicu.*[5]

Dokaz. Slučaj kružnice koja prolazi točkom O direktno slijedi iz teorema 1.6 i svojstva involutivnosti inverzije.

Neka sada O ne pripada kružnici k i neka su A i B točke presjeka kružnice k i pravca koji prolazi točkama O i S (gdje je S središte kružnice k), a M proizvoljna točka na k. Pokažimo da je kružnica k' promjera $A'B'$ slika pri inverziji kružnice k. Za to će, po Talesovu teoremu, biti dovoljno pokazati da je kut $\angle A'M'B'$ pravi. U daljnjem razmatranju koristit ćemo se orijentiranim kutovima, da ne bismo morali analizirati više slučajeva u ovisnosti o položaju točke M. Iz teorema 1.4 imamo sličnost trokuta OAM i $OM'A'$ te OBM i $OM'B'$, pa je $\angle OMA = \angle OA'M'$ i $\angle OMB = \angle OB'M'$, tj. $\angle(OM, MA) = -\angle(OA', M'A')$ i $\angle(OM, MB) = -\angle(OB', M'B')$. Zato je $\angle(A'M', M'B') = \angle(A'M', OA') + \angle(OB', M'B') = \angle(OM, MA) + \angle(MB, OM) = \angle(MB, MA) = 90°$. □

Teorem 1.8. *Slike pri inverziji kružnice i njezine tangente (ili dviju kružnica koje se dodiruju) dodiruju se ako i samo ako se točka dodira originala ne poklapa s centrom inverzije. U suprotnom, preslikavaju se u paralelne pravce.*

Dokaz. Dovoljno je provesti dokaz u jednom smjeru, drugi slijedi iz bijektivnosti i involutivnosti inverzije. Ako se točka dodira ne poklapa sa centrom inverzije, očito će i nakon inverzije postojati zajednička točka među krivuljama, tj. i slike će se dodirivati. S druge strane, ako se dvije kružnice dodiruju u točki O, tada se preslikavaju u dva pravca okomita na pravac koji povezuje njihova središta.

[5] Ovo ipak ne znači da se u slučaju preslikavanja kružnice u kružnicu središte jedne preslikava u središte druge – možete to provjeriti!

Ako je riječ o pravcu i kružnici koji se dodiruju u točki O, tada se pravac preslikava u samog sebe, a kružnica u pravac okomit na pravac koji povezuje točku O i središte kružnice. Očito je da je u oba slučaja riječ o preslikavanju u dva paralelna pravca. □

Teorem 1.9. *Ako je O centar inverzije, a točke A i B tom su inverzijom preslikane u A' i B', tada vrijedi*

$$A'B' = \frac{AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}.$$

Dokaz. Iz teorema 1.4 imamo $OA : AB = OB' : A'B'$, dok iz definicije 1.1 imamo $OB \cdot OB' = r^2$. Iz ove dvije relacije direktno slijedi $A'B' = AB \cdot r^2/(OA \cdot OB)$. □

Teorem 1.10. *Inverzija je konformalno preslikavanje, tj. čuva kutove među krivuljama.*[6]

Dokaz. Dokaz ćemo provesti na primjeru dviju kružnica (što ne vodi smanjenju općenitosti, jer je slučaj pravca i kružnice zapravo specijalan slučaj dviju kružnica). Povucimo tangente t_1 i t_2 kroz točku presjeka kružnica. Prema teoremu 1.8, kut između slika kružnica jednak je kutu između slika tangenti. Inverzijom s centrom u O, pravac t_i preslikava se u samog sebe ili u kružnicu čija je tangenta u točki O paralelna pravcu t_i. Zato je kut između slika pravaca t_1 i t_2 jednak kutu između originala. Time je tvrdnja dokazana. □

Navedeni teoremi dovoljni su za uspješno korištenje inverzije u elementarnoj planimetriji (kao što ćemo i vidjeti na primjerima). No, sa znanstvene strane potrebno je na ovom mjestu dati još nekoliko napomena koje inverziju povezuju s modernim tokovima u geometriji.

S analitičke strane, inverziju krivulje možemo promatrati kroz transformaciju koordinata na temelju sljedećih teorema, koje navodimo bez dokaza samo zato što spomenuti teoremi nisu nužni za korištenje inverzije u standardnoj školskoj i natjecateljskoj planimetriji. No, čitatelj s osnovnim poznavanjem analitičke geometrije lako se može uvjeriti da ovi teoremi jednostavno slijede iz definicije 1.1.

Teorem 1.11. *Ako je polarna jednadžba krivulje K dana s $r = r(\theta)$, tada je polarna jednadžba njoj inverzne krivulje dana jednadžbom $r = k^2/r(\theta)$, gdje je k polumjer inverzije.*

Teorem 1.12. *Ako je $O(x_0, y_0)$ centar, a k polumjer inverzije, tada je krivulja inverzna krivulji $C(f(t), g(t))$ u Kartezijevim pravokutnim koordinatama dana s*[7]

$$x = x_0 + \frac{k^2(f - x_0)}{(f - x_0)^2 + (g - y_0)^2}$$

[6] Točnije, antikonformalno preslikavanje, jer preslikani (orijentirani) kut je suprotan po smjeru onom originalnom. Napomenimo i to da kutom između dviju krivulja smatramo kut između tangenti na te krivulje.

[7] Primijetimo da se, ako se za kružnicu inverzije izabere jedinična kružnica sa središtem u ishodištu, navedene jednadžbe dosta pojednostavljuju.

$$y = y_0 + \frac{k^2(g - y_0)}{(f - x_0)^2 + (g - y_0)^2}.$$

Koristeći se ovim teoremima, nije teško pokazati i analitički rezultate koje smo dobili kroz teoreme 1.4 – 1.9, kao i nove rezultate, npr. možemo doći do spoznaja u što se inverzijom preslikavaju druge poznate krivulje (konike, spirale...). Tako se npr. hiperbola preslikava u lemniskatu (ako se inverzija radi u odnosu na njezino središte), ili parabola u kardioidu (ako se inverzija radi u odnosu na njezin fokus). Više o tome možete naći u [12]. Na kraju, spomenimo i mogućnost generalizacije inverzije na višedimenzionalne prostore, od kojih je za elementarnu geometriju bitna samo sferna (trodimenzionalna) inverzija, o čemu više možete naći u [1].

2 Primjeri

Brojni su primjeri korištenja inverzije u planimetrijskim problemima. Kroz većinu primjera provlači se jedna važna činjenica: inverziju primjenjujemo u slučajevima kad se jedna točka na slici zadatka nameće kao centar problema: kroz nju prolazi više kružnica, određuje više važnih kutova i slično.

Ovdje ćemo se ograničiti na primjere iz „natjecateljske prakse". Naime, iako je jako ilustrativna primjena inverzije na tzv. pramene kružnica i sustave koje čine same kružnice (vidi npr. nešto više o Steinerovoj porizmi, ili o Apolonijevim krugovima u [7] ili [2]), takvi primjeri nisu najpogodniji za upoznavanje mladog natjecatelja s magijom inverzije (kao ni, npr., jako zanimljivi načini primjene inverzije u izvođenju geometrijskih konstrukcija samo s pomoću šestara, vidi [6] ili [10]).

Primjer 2.1. *([8], Ptolomejev teorem) Za konciklične točke A, B, C, D vrijedi: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.*

Rješenje. Promatrajmo inverziju s centrom u D i proizvoljnim polumjerom r. Opisana kružnica trokuta ABC preslikava se u pravac koji prolazi točkama A', B' i C' (teorem 1.7). Budući da je $A'B' + B'C' = A'C'$, prema teoremu 1.9 imamo:

$$\frac{AB \cdot r^2}{AD \cdot BD} + \frac{BC \cdot r^2}{BD \cdot CD} = \frac{AC \cdot r^2}{AD \cdot CD}.$$

Množenjem posljednje jednakosti s $(AD \cdot BD \cdot CD)/r^2$ dobivamo traženu jednakost. Provedemo li postupak unatrag, nije teško dobiti i obrat ovog teorema.

Primjer 2.2. *([3]) Dane su kružnice k_1, k_2, k_3 i k_4 takve da svaka od kružnica k_2, k_4 dodiruje kružnice k_1 i k_3, pri čemu točke dodira nisu kolinearne. Dokazati da su točke dodira konciklične.*

Rješenje. Označimo točke dodira kružnica k_1 i k_2, k_2 i k_3, k_3 i k_4 te k_4 i k_1 redom s A, B, C i D. Inverzija s centrom u A proizvoljnog polumjera preslikava k_1 i k_2 u paralelne pravce k_1' i k_2', a k_3 i k_4 u kružnice k_3' i k_4' koje se dodiruju u točki C', a pravce k_2' i k_4' dodiruju redom u B' i D'. Očito su B', C' i D' kolinearne točke, pa B, C i D leže na kružnici koja prolazi točkom A (teorem 1.6).

Primjer 2.3. *([8], Iran 1995.) Označimo s M, N i P točke dodira upisane kružnice trokuta ABC i stranica AB, BC i CA, redom. Dokazati da su središte upisane i opisane kružnice trokuta ABC te ortocentar trokuta MNP kolinearni.*

Rješenje. Središte upisane kružnice trokuta ABC i ortocentar trokuta MNP leže na Eulerovom pravcu[8] trokuta MNP. Inverzijom u odnosu na upisanu kružnicu trokuta ABC točke A, B i C preslikaju se u A', B' i C' koje su redom polovišta dužina PM, MN i NP. Budući da je središte opisane kružnice trokuta $A'B'C'$ ujedno i središte kružnice devet točaka[9] trokuta MNP, koji se nalazi na Eulerovom pravcu trokuta MNP, središte kružnice opisane oko trokuta ABC također se nalazi na ovom pravcu.

Primjer 2.4. *([4], IMO 1996.) Neka je P točka u unutrašnjosti trokuta ABC takva da vrijedi $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$ i neka su D i E središta upisanih kružnica trokuta APB i APC, redom. Pokazati da se AP, BD i CE sijeku u jednoj točki.*

Rješenje. Primijenimo li inverziju s centrom u A i proizvoljnim polumjerom r, zadani uvjet pretvara se u $\angle B'C'P' = \angle C'B'P'$, tj. $B'P' = P'C'$. Budući da je $P'B' = PB \cdot r^2/(AP \cdot AB)$ (teorem 1.9), vrijedi $AC/AB = PC/PB$. Iz posljednje jednakosti slijedi da simetrale BD i CD kutova $\angle ABP$ i $\angle ACP$ dijele dužinu AP u istim omjerima, te su konkurentne s AP.

Primjer 2.5. *([3], Izrael 1995.) Neka je PQ promjer polukružnice s, a kružnica k iznutra dodiruje s i dužinu PQ u točki C. Neka su A i B redom točke na s i PQ takve da je AB tangenta na k okomita na PQ. Dokazati da je AC simetrala kuta $\angle PAB$.*

Rješenje. Promatrajmo inverziju s centrom u C, proizvoljnog polumjera. Polukružnica s preslikava se u polukružnicu s' promjera $P'Q'$, kružnica k u tangentu k' polukružnice s' paralelnu s $P'Q'$, a AB u kružnicu l čije se središte nalazi na $P'Q'$ i dodiruje k' (pa je polumjer kružnice l jednak polumjeru polukružnice s'). Kružnica l tada siječe s' i $P'Q'$ redom u točkama A' i B'. Očito je $P'A'B'$ jednakokračan trokut, pa vrijedi $\angle PAC = \angle A'P'C = \angle A'B'C = \angle BAC$ (teorem 1.10).

Primjer 2.6. *([11], Srbija 2008.) Dan je trokut ABC. Neka su točke D i E na pravcu AB u redoslijedu D - A - B - E takve da je $AD = AC$ i $BE = BC$. Simetrale unutarnjih kutova kod tjemena A i B sijeku nasuprotne stranice redom u točkama P i Q, a kružnicu opisanu trokutu ABC redom u točkama M i N. Pravac koji spaja točku A sa središtem kružnice opisane trokutu BME i pravac koji spaja točku B sa središtem kružnice opisane trokutu AND sijeku se u točki X, $X \neq C$. Dokazati da je $CX \perp PQ$.*

[8] Eulerov pravac trokuta je pravac na kojem leže središte opisane kružnice, težište i ortocentar tog trokuta.

[9] Kružnica devet točaka ili Feuerbachova (Eulerova) kružnica trokuta ABC prolazi polovištima stranica trokuta, nožištima normala i polovištima dužina AH, BH i CH, gdje je H ortocentar trokuta ABC.

Rješenje. Označimo s U središte kružnice opisane trokutu BME. Primijenimo li inverziju s centrom u A i kvadratom polumjera $AB \cdot AC$, točke B i C preslikavaju se u točke B' i C' simetrične točkama C i B u odnosu na AP, točke P i M preslikavaju se jedna u drugu, a E preslikava se u točku E' simetričnu Q u odnosu na AP. Prema tome, pravac AU poklapa se s pravcem koji spaja A sa središtem kružnice $B'PE'$.

Vidimo da je taj pravac simetričan pravcu AZ u odnosu na simetralu kuta A, gde je Z središte kružnice opisane trokutu CPQ. Analogno se dobiva da je pravac BZ simetričan pravcu koji spaja B sa središtem V kružnice AND u odnosu na simetralu kuta B. Po Cevinu teoremu u trigonometrijskom obliku, pravci simetrični pravcima AU, BV, CX u odnosu na simetrale kutova A, B, C redom se također sijeku u jednoj točki, što znači da je pravac CZ simetričan CX u odnosu na simetralu kuta C. No, kako je Z središte kružnice CPQ, pravac CX sadržava visinu trokuta CPQ, što je trebalo i dokazati.

Analizom ovih primjera čitatelj je mogao doći do zaključka da primjena inverzije često pojednostavljuje inače kompliciran problem (uglavnom je, naime, riječ o problemima koji su i nastali invertiranjem poznatijih, jednostavnih problema). No, to nije uvijek slučaj. Mnoge probleme primjena inverzije može dodatno zakomplicirati – zato oprez!

3 Zadaci za samostalan rad

Zadatak 3.1. *([9], Dunavski kup 2007.) Neka je točka E polovište dijagonale BD tetivnog četverokuta $ABCD$ i neka su k_1, k_2, k_3 i k_4 opisane kružnice trokuta AEB, BEC, CED i DEA, redom. Ako je pravac CD tangenta na kružnicu k_4, dokazati da su tada pravci BC, AB i AD redom tangente na kružnice k_1, k_2 i k_3.*

Zadatak 3.2. *([3]) Dokazati Feuerbachov teorem: kružnica devet točaka dodiruje upisanu i sve tri pripisane kružnice trokuta.*

Zadatak 3.3. *([4], IMO Shortlist 2003.) Neka su Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 nepodudarne kružnice takve da se Γ_1 i Γ_3 te Γ_2 i Γ_4 dodiruju izvana u točki P. Neka su A, B, C i D redom točke presjeka Γ_1 i Γ_2; Γ_2 i Γ_3; Γ_3 i Γ_4; Γ_4 i Γ_1, pri čemu su sve te točke različite od P. Dokazati da vrijedi*

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

Zadatak 3.4. *([7], Rumunjska 1997.) Označimo s k upisanu kružnicu trokuta ABC i s D proizvoljnu točku na stranici BC tog trokuta. Dokazati da se kružnice koje dodiruju k, AD i BD te k, AD, DC međusobno dodiruju ako i samo ako je $\angle BAD = \angle CAD$.*

Zadatak 3.5. *([7], SAD 1993.) Neka je $ABCD$ četverokut s međusobno okomitim dijagonalama koje se sijeku u O i neka su točke O_1, O_2, O_3 i O_4 osno simetrične točki O u odnosu na AB, BC, CD i DA, redom. Dokazati da je četverokut $O_1O_2O_3O_4$ tetivni.*

Zadatak 3.6. *([4], IMO Shortlist 1993.) Neka je točka I središte upisane, a O središte opisane kružnice k trokuta ABC. Kružnica k_C dodiruje stranice CA i CB u točkama D i E te iznutra dodiruje kružnicu k. Dokazati da je točka I polovište dužine DE.*

Zadatak 3.7. *([4], IMO Shortlist 2002.) Upisana kružnica k oštrokutnog trokuta ABC dodiruje stranicu BC u točki K. Točka M je polovište visine spuštene iz točke A na BC, a N (druga) točka presjeka kružnice k i KM. Dokazati da se opisana kružnica trokuta BCN i kružnica k dodiruju u točki N.*

Literatura

[1] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley, 1969.

[2] H. S. M. Coxeter, S.L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Toronto - New York, 1967.

[3] D. Đukić, *Inversion*, Olympiad Training Materials (IMO Compendium Group), 2007.

[4] D. Đukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium*, Springer, 2005.

[5] D. Hilbert, S. Cohn-Fossen, *Geometry and the Imagination*, Chelsea - New York, 1952.

[6] I. M. Jaglom, *Geometričeskie preobrazovanija II*, Moskva, 1956.

[7] K. S. Kedlaya, *Geometry Unbound*, 2006.

[8] K. Y. Li, *Inversion*, Mathematical Excalibur, Vol. 9., No. 2, May-July 2004.

[9] MathLinks Forums

[10] V. V. Praslov, *Problems in Plane Geometry* (prijevod: D. Leites), 2005.

[11] *Srpska matematička olimpijada 2008 – zadaci i rešenja*, Srb. imomath. com., 2008.

[12] R.C. Yates, *A Handbook of Curves and Their Properties*, Ann Arbor, 1952.