Matematičko modeliranje konflikta - Richardsonov model

Zlatko Matijašević, Igor Pažanin

Sažetak

U ovom radu prezentiramo matematički model koji opisuje mogući konflikt između dviju država/saveza s pomoću jednostavnog sustava običnih diferencijalnih jednadžbi. Koristeći se osnovnim pojmovima i rezultatima teorije stabilnosti, analiziramo izvedeni model i diskutiramo njegovu valjanost na temelju stvarnih događanja uoči Prvog svjetskog rata.

1 Uvod

Budući da je derivacija mjera promjene, diferencijalnim se jednadžbama najjednostavnije izražavaju i modeliraju mnogi prirodni zakoni te razni procesi u različitim područjima znanosti i tehnike (v. npr. [1, 2]). U ovom radu proučavat ćemo matematički model kojem je cilj opisati odnos dviju država, pri čemu je svaka od njih odlučna braniti se u slučaju agresije druge. Model je zasnovan na jednostavnom, linearnom sustavu običnih diferencijalnih jednadžbi te je prvi put prikazan u članku[1]:
Richardson, L. F., *Generalized foreign politics: a study in group psychology*, British Journal of Psychology, Monograph Supplements no.23 (1939).
Ovaj rad napisan je prema pregledu spomenutog članka koji nalazimo u [4] (odjeljak 4.5.1).
Premda jednostavan, Richardsonov model predstavlja vrlo uspio pokušaj da se formalno, matematički, analizira sukob dviju strana i dođe do spoznaja o uzrocima njegova izbijanja. Upravo su uzroci koji dovode do rata ili eskalacije

[1]Detaljan prikaz života i djela Lewisa Frya Richardsona moguće je pronaći na internetskoj stranici http://maths.paisley.ac.uk/LfR/home.htm

konflikta bili predmet mnogobrojnih rasprava tijekom povijesti. Prisjetimo se jedne vezane uz Prvi svjetski rat. Sir Edward Grey, ministar vanjskih poslova Velike Britanije, govorio je u to vrijeme: *Povećanje naoružanja koje ima za cilj osnažiti osjećaj moći i sigurnosti jedne nacije, zapravo uopće ne postiže taj efekt. Posve suprotno, ono izaziva strah te uzrokuje jačanje osjećaja snage drugih nacija. Enormni porast naoružanja u Europi - to je ono što je učinilo ovaj veliki rat neizbježnim.* S druge strane, L. S. Amery, član Donjeg doma britanskog Parlamenta u svom govoru 1930. replicira: *Uz dužno poštovanje prema preminulom državniku, porast naoružanja samo je simptom sukoba ambicija i teritorijalnih pretenzija onih nacionalističkih sila koje su htjele rat. Rat je započeo iz jednostavnog razloga. Zato što su Srbija, Italija i Rumunjska željele integrirati u svoj sastav teritorije koji su u to vrijeme pripadali austrijskom carstvu i kojih se ono nije bilo spremno odreći bez borbe.* Važno je napomenuti da Richardsonov model, koji ćemo izvesti u idućem poglavlju, uzima u obzir obje teorije kao uzroke konflikta.

2 Izvod modela

Označimo s $x = x(t)$ ratni potencijal, tj. razinu naoružanja države X u trenutku t (mjereno u godinama), a s $y = y(t)$ razinu naoružanja države Y. Osnovna pretpostavka modela jest da funkcija $t \mapsto x(t)$ zadovoljava zakon prema kojem njezina brzina promjene ovisi o sljedeća tri čimbenika:

1. animozitetu kojeg Država X gaji prema Državi Y,
2. razini naoružanja $y(t)$ države Y,
3. troškovima naoružavanja države X.

U najjednostavnijem slučaju, prva dva čimbenika moguće je opisati izrazima g i $ky(t)$ respektivno, pri čemu smo s g i k označili pozitivne konstante. Za razliku od (1) i (2) koji potiču rast funkcije $x(t)$, čimbenik (3) usporava njezin rast te ga stoga reprezentiramo s $-\alpha x(t)$, gdje je $\alpha = \text{const.} > 0$. Na taj način dobivamo jednadžbu

$$\frac{dx}{dt}(t) = g + ky(t) - \alpha x(t) \ .$$

Pretpostavljajući da se $t \mapsto y(t)$ ponaša po sličnom zakonu, analognim zaključivanjem dolazimo do jednadžbe koju mora zadovoljavati $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt}(t) = h + \ell x(t) - \beta y(t) \ , \quad h, \ell, \beta = \text{const.} > 0.$$

Dakle, funkcije $x = x(t),\ y = y(t)$ zadovoljavaju sljedeći autonomni[2] linearni sustav običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda s konstantnim koeficijentima:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + ky + g \ , \tag{2.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \ell x - \beta y + h \ . \tag{2.2}$$

Uvedemo li

$$\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha & k \\ \ell & -\beta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix},$$

vidimo da se sustav (2.1)–(2.2) može zapisati u matričnom obliku:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b} \ . \tag{2.3}$$

Napomena 2.1 *Model koji opisuje sustav (2.3) primjenjiv je i na saveze država (alijanse). Primjerice, u kontekstu Prvog svjetskog rata, državu X možemo zamijeniti savezom Antante koji su činile Rusija, Francuska i Velika Britanija, a državu Y savezom sila osovine u kojem su sudjelovale Njemačka i Austro-Ugarska.*

Napomena 2.2 *Pretpostavka modela kojom su animoziteti g i h uzeti kao konstantne vrijednosti koje nisu u funkciji vremena t, vrlo je gruba i ne odgovara realnosti. Ti parametri, bez sumnje, mijenjaju se s vremenom, štoviše, imaju velike i nagle skokove pa ih ne možemo reprezentirati niti neprekinutim funkcijama (pretpostavka da su $g = g(t)$ i $h = h(t)$ po dijelovima konstantne funkcije bila bi znatno primjerenija). Bez obzira na tu manjkavost, dani model dobro opisuje stvarnu situaciju uoči Prvog svjetskog rata (v. Primjer 3.4).*

[2] Na desnim stranama u jednadžbama ne pojavljuje se varijabla t.

Razmotrimo sada neke jednostavne posljedice izvedenog modela:

(i) Uzmimo da je $g = h = 0$. Tada su $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ ravnotežna stanja[3] sustava (2.1)–(2.2), što znači da ako x, y, g i h u nekom trenutku $t = t_0$ poprime vrijednost 0, $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ za svaki $t > t_0$. To možemo interpretirati kao stanje trajnog mira nastalog zbog obostranog razoružanja i nezamjeranja.

(ii) Pretpostavimo da x i y iščezavaju u nekom trenutku $t = t_0$. Tada je $\frac{dx}{dt} = g$ i $\frac{dy}{dt} = h$. Prema tome,

$$g, h > 0 \quad \Rightarrow \quad x(t), y(t) \neq 0, \quad t > t_1 > t_0.$$

Dakle, ako postoji animozitet (s bilo koje strane), obostrano razoružanje neće samo po sebi dovesti do stanja trajnog mira.

(iii) Neka je $y(t) = 0$ za neki $t = t_0$. Tada iz (2.2) slijedi $\frac{dy}{dt} = \ell x + h$ iz čega zaključujemo da y neće i ostati 0 ako je barem jedan od h i x pozitivan. Zaključujemo: jednostrano razoružanje nije trajno. To je u skladu s povijesnom činjenicom da se Njemačka, koja je broj vojnika temeljem Versailleskog ugovora smanjila na 100000 (a što je bilo znatno ispod razine njezinih susjeda), naglo počela jačati vojsku u razdoblju od 1933-1936.

(iv) Utrka u naoružavanju započinje kada "obrambeni mehanizmi" počnu dominirati i potpuno prevagnu u odnosu na ostale čimbenike. Na taj način, sustav (2.1)–(2.2) prelazi u

$$\frac{dx}{dt} = ky, \qquad \frac{dy}{dt} = \ell x \; . \tag{2.4}$$

Deriviramo li prvu jednadžbu po t i uvažimo drugu, dobivamo

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k\ell x = 0 \; .$$

Time smo dobili homogenu linearnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima čije opće rješenje glasi

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{k\ell}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{k\ell}\, t}, \qquad C_1, C_2 = \text{const.}$$

[3] Ravnotežno stanje je rješenje polaznog sustava koje ne ovisi o vremenu, tj. za koje vrijedi $\frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv 0$. Prema tome, $\mathbf{x}^*$ će biti ravnotežno stanje sustava $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ako i samo ako je $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \equiv 0$.

Vratimo li to u $(2.4)_2$, jednostavnim integriranjem nalazimo

$$y(t) = \sqrt{\frac{\ell}{k}} \left(C_1 e^{\sqrt{k\ell}\, t} - C_2 e^{-\sqrt{k\ell}\, t} \right) .$$

Uočavamo da $x(t), y(t) \to +\infty$ kad $t \to +\infty$, što možemo interpretirati kao rat.

3 Stabilnost

Kao što smo prije spomenuli, nultočke desne strane $\mathbf{f}(\mathbf{w}) := \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b}$ predstavljaju **ravnotežna stanja** sustava (2.3). Ako je $\alpha\beta - k\ell \neq 0$, lako je pokazati da naš sustav ima jedinstveno ravnotežno stanje oblika

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \frac{kh + \beta g}{\alpha\beta - k\ell}, \qquad y_0 = \frac{\ell g + \alpha h}{\alpha\beta - k\ell} . \tag{3.1}$$

U ovom poglavlju želimo ustanoviti uz koje uvjete na parametre modela α, β, k i ℓ je ravnotežno rješenje (3.1) stabilno, odnosno nestabilno. Problem stabilnosti sustava običnih diferencijalnih jednadžbi fundamentalno je pitanje kojom se bavi tzv. *kvalitativna teorija diferencijalnih jednadžbi.* Zainteresirani čitatelj može više o tome pronaći u knjigama [3, 4].

Osnovnu definiciju stabilnosti uvest ćemo za proizvoljno rješenje (ne nužno ravnotežno) autonomnog sustava

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) , \qquad \mathbf{f} : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n . \tag{3.2}$$

Definicija 3.1 *Kažemo da je rješenje $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ sustava (3.2)* **stabilno** *ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako rješenje $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sustava koje u početnom trenutku zadovoljava*

$$|x_i(0) - x_i^*(0)| < \delta , \quad i = 1, ..., n$$

vrijedi

$$|x_i(t) - x_i^*(t)| < \varepsilon , \quad t > 0, \quad i = 1, ..., n .$$

U slučaju linearnog autonomnog sustava oblika

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}\ , \qquad \mathbf{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})\ , \tag{3.3}$$

vrijedi sljedeći važan rezultat (za dokaz v. npr. [4]):

Teorem 3.2 *Neka je $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ i $\sigma(\mathbf{A})$ njen spektar. Tada je svako rješenje linearnog sustava (3.3) stabilno ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall \lambda \in \sigma(\mathbf{A})) \qquad Re\,\lambda \leq 0 \quad \& \tag{3.4}$$

$$Re\,\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad a_\lambda = g_\lambda\ , \tag{3.5}$$

pri čemu je a_λ algebarska, a g_λ geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ.

Koristeći se ovim teoremom, ispitajmo sada stabilnost rješenja (3.1). Kako bismo mogli primijeniti navedeni rezultat, zapišimo sustav (2.3) u obliku (3.3). U tu svrhu uvedimo

$$\mathbf{z} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_0$$

kao razliku između proizvoljnog i ravnotežnog rješenja. Tada slijedi

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{z} + \mathbf{w}_0) + \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{A}\mathbf{w}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{z}. \tag{3.6}$$

U zadnjem koraku iskoristili smo da je $\mathbf{w}_0$ ravnotežno rješenje, tj. $\mathbf{f}(\mathbf{w}_0) \equiv 0$. Prema tome, $\mathbf{w}_0$ će biti stabilno rješenje polaznog sustava (2.3) ako i samo ako je $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ stabilno rješenje sustava (3.6).

Odredimo sada karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} k_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \ &= \det \begin{pmatrix} -\alpha - \lambda & k \\ \ell & -\beta - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + (\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta - k\ell\ . \end{aligned}$$

Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ računamo kao nultočke polinoma $k_{\mathbf{A}}$ i dane su sa

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4k\ell}}{2}\ . \tag{3.7}$$

Budući da je diskriminanta $(\alpha - \beta)^2 + 4k\ell > 0$, slijedi da su obje svojstvene vrijednosti realne (i različite od nule, zbog $\alpha\beta - k\ell \neq 0$). Nadalje, one će obje biti negativne ako je

$$(\alpha + \beta) > \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4k\ell}$$

tj.

$$\alpha\beta - k\ell > 0 \ .$$

Uzimajući u obzir Teorem 3.2, zaključujemo: **ravnotežno rješenje $\mathbf{w}_0$ sustava (2.3) stabilno je onda i samo onda kad je** $\alpha\beta - k\ell > 0$. Važno je uočiti da uvjet stabilnosti ne ovisi o animozitetima g i h.

Napomena 3.3 *Procjena parametara modela α, β, k, ℓ, g i h nije nimalo lak zadatak. Jasno je da animozitete g i h nije moguće ocijeniti. No, budući da uvjet stabilnosti ne ovisi o g i h, dovoljno je na neki način procijeniti preostale parametre. Primijetimo da su ti parametri obrnuto proporcionalni vremenu te ih stoga možemo izraziti s pomoću mjerne jedinice $(godina)^{-1}$. Richardson u svom radu parametar α^{-1} (odn. β^{-1}) procjenjuje kao duljinu mandata parlamenta države X (odn. Y) dok za k (odn. ℓ) pretpostavlja da je proporcionalan jačini industrije koje država X (odn. Y) posjeduje.*

Primjer 3.4 *Usporedimo sada naš model sa stvarnim događanjima u Europi u razdoblju od 1909. – 1914., uoči Prvog svjetskog rata. Označimo s X i Y dva saveza: X – Rusija, Francuska i Velika Britanija, Y – Njemačka i Austro-Ugarska. S obzirom na to da su ta dva saveza bila približno jednakih snaga, možemo uzeti da je $k = \ell$. Richardson dolazi do ocjene $k = 0.3$ $(godina)^{-1}$ u slučaju Njemačke, pa budući da su oba saveza približno tri puta veća u odnosu na Njemačku, stavimo $k = \ell = 0.9$. S druge strane, budući da duljina mandata parlamenata država koje sudjeluju u savezu iznosi prosječno 5 godina, uzimamo $\alpha = \beta = 0.2$. Dakle, jednadžbe modela glase*

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + ky + g \ , \qquad \frac{dy}{dt} = kx - \alpha y + h \ . \tag{3.8}$$

Sustav (3.8) ima jedinstveno ravnotežno stanje dano s

$$x_0 = \frac{kh + \alpha g}{\alpha^2 - k^2} \ , \qquad y_0 = \frac{kg + \alpha h}{\alpha^2 - k^2}$$

koje nije stabilno s obzirom na to da je

$$\alpha\beta - k\ell = \alpha^2 - k^2 = 0.04 - 0.81 = -0.77 < 0 \ .$$

To je, naravno, u skladu s povijesnom činjenicom da su ova dva saveza na kraju ušla u sukob i tako otpočela Prvi svjetski rat.

Literatura

[1] M. Alić, Obične diferencijalne jednadžbe, Skripta PMF–Matematičkog odjela, Zagreb, 1994.

[2] J.R. Brannan, W.E. Boyce, Differential Equations: An Introduction to Modern Methods & Applications, John Wiley & Sons, San Francisco, 2007.

[3] F. Brauer, J.A. Nohel, The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: An Introduction, Dover Publications, New York, 1989.

[4] M. Braun, Differential Equations and Their Applications, Springer–Verlag, New York, 1986.