

Regularni politopi

Mario Berljafa

Ana Šušnjara

Sažetak

U ovom članku promatramo dvodimenzionalne, trodimenzionalne i višedimenzionalne regularne politope. Pozabavili smo se ponajprije njihovom egzistencijom, konstrukcijom te svojstvima koja zadovoljavaju njihovi elementi. Najvažniji teorem članka, poznat pod nazivom Euler–Poincaréova formula, nalazi se u šestom poglavlju te povezuje broj svih elemenata n -dimenzionalnog politopa.

Sadržaj

1	Uvod	2
2	Manje dimenzije	2
3	Kroz poznato...	3
4	... generalizacijom...	9
5	... u nepoznato	11
6	Veće dimenzije	15
	Literatura	18

1 Uvod

Teorija politopa u dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom Euklidskom prostoru jedna je od najstarijih grana matematike. Još od antičkih vremena bila je intrigantno područje tadašnjim matematičarima pa su tako regularni poligoni i poliedri činili znatan dio njihovih proučavanja. Pretpostavlja se da su čak i pitagorejci bili upoznati s regularnim poliedrima.

Osoba koja je prva sustavno iznijela teoriju regularnih poliedara bio je Euklid. U XIII. knjizi „Elementa”, posvećenoj upravo regularnim poliedrima, Euklid, uz njihovu definiciju, daje dokaz njihove egzistencije, konstrukcije pa i dokaz da ih postoji samo pet. Zbog algebarskih, geometrijskih i kombinatornih svojstava koja regularni poliedri imaju, matematičari su često pokušavali naći njima analogne objekte koji bi imali neka, ne nužno sva, svojstva regularnih poliedara. Međutim, bilo je potrebno duže razdoblje da bi se stvorili preduvjeti za daljnji razvoj ovog područja matematike pa je tek u 19. stoljeću dokazano da postoje n -dimenzionalni politopi, $n \geq 4$. U trenutku kada je Ludwig Schläfli dokazao da takvi objekti postoje, tek je nekolicina matematičara bila svjesna da je geometrija u n -dimenzionalnom prostoru, $n \geq 4$, moguća. Također je pokazano da su jedini regularni politopi u tim prostorima poopćenja određenih regularnih poliedara. Premda su regularni politopi uglavnom proučavani radi svojeg oblika, a prvobitna im je upotreba bila u umjetnosti, danas imaju i praktičnu primjenu u mineralogiji, arhitekturi, linearnom programiranju i drugim područjima.

Temeljna ideja članka je upoznati čitatelja s osnovnim pojmovima iz teorije regularnih politopa te se nadamo da ćemo nekoga potaknuti da sazna više o ovoj temi. Naše putovanje kroz dimenzije počinjemo od najmanjih:

2 Manje dimenzije

U 0-dimenzionalnom prostoru jedini objekti su točke dok u jednodimenzionalnom imamo i dužine. Iz sljedeće definicije vidimo da je 2-dimenzionalni prostor nešto bogatiji.

Definicija 2.1. *Poligon je konačno područje omeđeno s $p \geq 3$ dužina $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_pA_1}$ koje se ne sijeku osim u zajedničkom vrhu, ako takav postoji.*

Definicija 2.2. *Čelija poligona π_2 je brid danog poligona.*

Definicija 2.3. *Vršna figura vrha V poligona π_2 je dužina čije su krajnje točke polovišta bridova incidentnih s vrhom V .*

Posebnu klasu poligona čine regularni poligoni:

Definicija 2.4. *Poligon je **regularan** ako su svi njegovi bridovi i svi unutrašnji kutovi sukladni.*

L. Schläfli uveo je notaciju regularnih politopa koja se njemu u čast naziva Schläflijev simbol. U kontekstu Schläflijeve notacije, regularne poligone s p stranica, odnosno p -terokute, označavamo s $\{p\}$.

Laganim računom dobivamo da su mjere unutrašnjih kutova $\{p\}$ -a jednake

$$\frac{(p-2) \cdot 180^\circ}{p}$$
. Primjenom teorema SKS o sukladnosti trokuta na jednakokračne trokute čiji je jedan vrh vrh $\{p\}$ -a, a osnovica vršna figura tog vrha, dobivamo da su vršne figure $\{p\}$ -a sukladne.

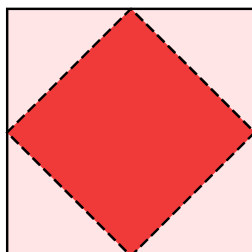
Regularnih poligona ima beskonačno mnogo, za razliku od njihovih višedimenzionalnih poopćenja.

Definicija 2.5. *Dualan poligon danog poligona π_2 je poligon čiji su vrhovi polovišta bridova od π_2 .*

Definicija 2.6. *Okrnjen poligon* danog poligona π_2 je poligon čiji su bridovi vršne figure vrhova od π_2 .

Napomena 2.7. *Primijetimo da je π'_2 okrnjen poligon poligona π_2 ako i samo ako je π'_2 dualan poligon poligonu π_2 . Prethodna tvrdnja slijedi iz definicije, ali ona neće vrijediti u višim dimenzijama.*

Na sljedećoj se slici vidi što se događa u slučaju kvadrata:



Slika 1: Okrnjen kvadrat

3 Kroz poznato...

U ovom ćemo se poglavlju upoznati s trodimenzionalnim tijelima te nekim njihovim svojstvima. Počnimo s definicijom:

Definicija 3.1. *Poliedar* je konačan skup poligona tako raspoređenih u prostoru da je svaki brid nekog poligona ujedno brid još točno jednog poligona.

Definicija 3.2. *Svaki od poligona iz prethodne definicije nazivamo ćelijom danog poliedra π_3 .*

Definicija 3.3. *Vršna figura vrha V poliedra π_3 je poligon čije su krajnje točke polovišta bridova incidentnih s vrhom V .*

Definicija 3.4. *Poliedar je regularan ako su njegove ćelije i vršne figure regularni poligoni.*

Schläflijev simbol regularnog poliedra je $\{p, q\}$ pri čemu je $\{p\}$ ćelija, a $\{q\}$ vršna figura danog poliedra. Na slici 9 može se vidjeti primjer.

U poliedru π_3 označimo broj vrhova s N_0 , broj bridova s N_1 te broj strana s N_2 . Imajući u vidu ove oznake, vrijedi sljedeći, važan rezultat:

Teorem 3.5. (Eulerova formula) *Za konveksan π_3 vrijedi*

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2.$$

Dokaz. Neka je $\phi = N_0 - N_1 + N_2 - 1$. Treba dokazati da je $\phi = 1$. Promatramo konstrukciju poliedra. U prvom koraku imamo jednu stranicu. Dakle, tada je

$$N_2 = 1, N_0 = N_1 =: n \implies \phi = 0.$$

Dodajemo poligone na dosadašnju konstrukciju tako da imaju barem jedan zajednički brid. Indukcijom pokazujemo da, sve dok ne dobijemo „potpuni” poliedar, vrijedi $\phi = 0$.

U nekom koraku konstrukcije dodajemo k -terokut koji ima l zajedničkih bridova s dosadašnjom konstrukcijom, to jest $l + 1$ zajedničkih vrhova. Označimo li s N_2, N_1 i N_0 broj strana, bridova

i vrhova konstruiranog objekta prije dodavanja k -terokuta respektivno, te analogno N'_2, N'_1, N'_0 nakon dodavanja k -terokuta, dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} N'_0 &= N_0 + k - l - 1, \\ N'_1 &= N_0 + k - 1, \\ N'_2 &= N_0 + 1. \end{aligned}$$

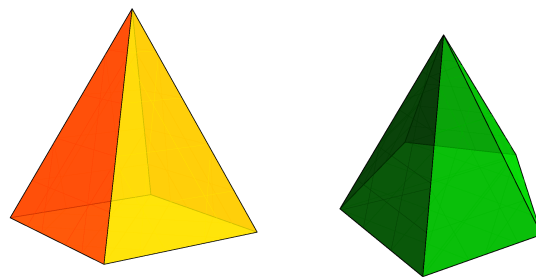
Dakle, $\phi' = N'_0 - N'_1 + N'_2 - 1 = N_0 - N_1 + N_2 - 1 = \phi = 0$.

U zadnjem koraku konstrukcije broj vrhova i bridova se ne mijenja, dok se broj strana povećava za 1 pa vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} N'_0 &= N_0 \\ N'_1 &= N_1 \\ N'_2 &= N_2 + 1 \end{aligned} \right\} \implies \phi' = 1.$$

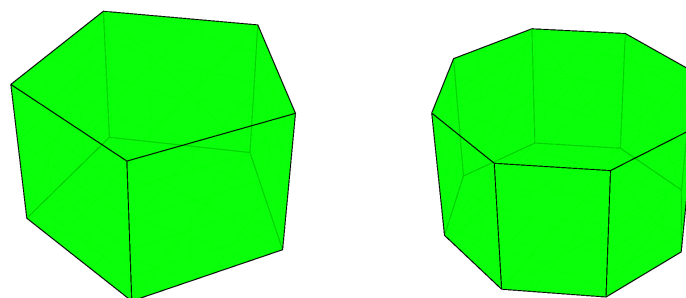
□

U sljedećem teoremu upotrebljavamo pojmove prizma, piramida i antiprizma, od kojih definiramo, ne sasvim precizno, samo posljednji. Poznato je na koji način možemo točku i $\{p\}$ spojiti s p trokuta kako bismo formirali piramidu. Također je jasno da spajanjem dvaju sukladnih



Slika 2: Četverostrana & peterostrana piramida

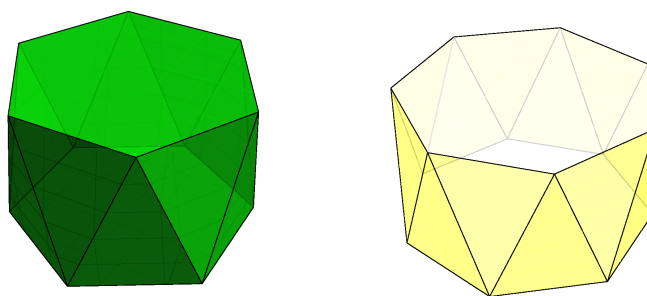
$\{p\}$ pravokutnicima dobivamo prizmu. Na slici 3 može se vidjeti peterostrana i osmerostrana



Slika 3: Peterostrana & osmerostrana prizma

prizma.

Antiprizma je poliedar sastavljen od dvaju sukladnih paralelnih poligona (baza) tako postavljenih u prostoru da ih možemo povezati nizom „alternirajućih” trokuta. Kažemo da je antiprizma p -strana ako su njene baze $\{p\}$. Primjer šesterostrane i sedmerostrane antiprizme ilustrirani su slikom 4. Kao što smo već spomenuli, regularni poliedri bili su predmet izučavanja antičkih matematičara, a budući da im je Platon pridavao posebna značenja, u literaturi su poznati i kao Platonova tijela.



Slika 4: Šesterostrana & sedmerostrana antiprizma

Teorem 3.6. *Postoji 5 Platonovih tijela do na sličnost.*

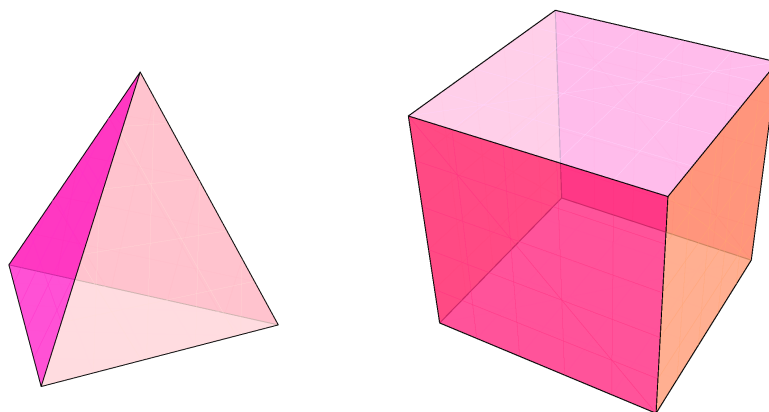
Dokaz. Neka je dan poliedar $\{m, n\}$. Očito je da vrijedi $2N_1 = mN_2 = nN_0$. Koristeći se Eulerovom formulom dobivamo:

$$\begin{aligned} 2\frac{N_1}{m} - N_1 + 2\frac{N_1}{n} &= 2 \\ 2nN_1 - mnN_1 + 2mN_1 &= 2mn \\ N_1(2n - mn + 2m) &= 2mn. \end{aligned}$$

Ta jednakost vrijedi samo ako je $2n - mn + 2m > 0$, to jest $mn - 2n - 2m + 4 < 4$, odnosno ako je $(m - 2)(n - 2) < 4$. Dakle, $(m - 2)(n - 2) \in \{1, 2, 3\}$. Razlikujemo tri slučaja:

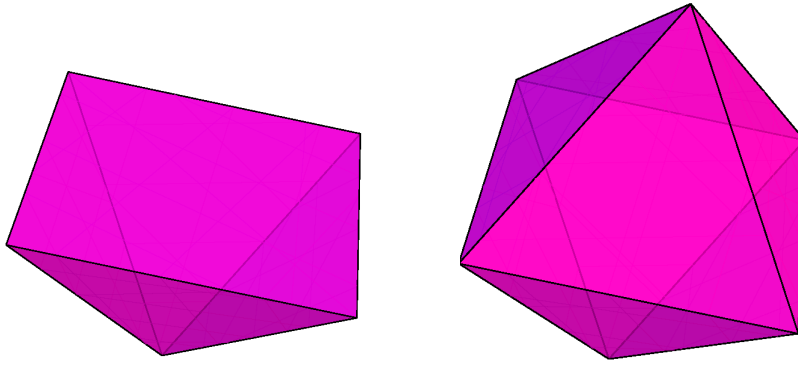
1. $(m - 2)(n - 2) = 1 \implies m = n = 3$
2. $(m - 2)(n - 2) = 2 \implies (m, n) \in \{(3, 4), (4, 3)\}$
3. $(m - 2)(n - 2) = 3 \implies (m, n) \in \{(3, 5), (5, 3)\}$.

Time smo pokazali da nema više od 5 Platonovih tijela. Konstrukcijom ćemo pokazati da zaista sva i postoje. $\{3, 3\}$ je piramida čija baza je trokut, $\{4, 3\}$ je prizma čija je baza kvadrat, $\{3, 4\}$

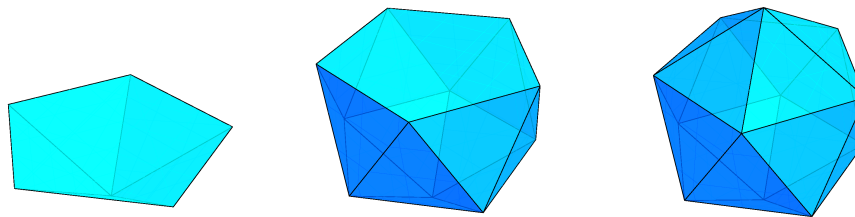


Slika 5: Tetraedar & kocka

dobivamo spajanjem dviju pravilnih četverostranih piramida tako da im se baze poklapaju (vidi sliku 6). $\{3, 5\}$ dobivamo spajanjem dviju pravilnih peterostranih piramida i jedne peterostrane antiprizme, kako je i prikazano na slici 7. Preostaje opisati konstrukciju $\{5, 3\}$ —na odgovarajući način spojimo 6 peterokuta kako bismo formirali „zdjelu”. Slobodni bridovi čine deseterokut koji ne leži u ravnini. Spajanjem dvaju takvih objekata duž spomenutih slobodnih bridova dobivamo $\{5, 3\}$. Gornju konstrukciju možete vidjeti na slici 8. \square



Slika 6: Konstrukcija oktaedra



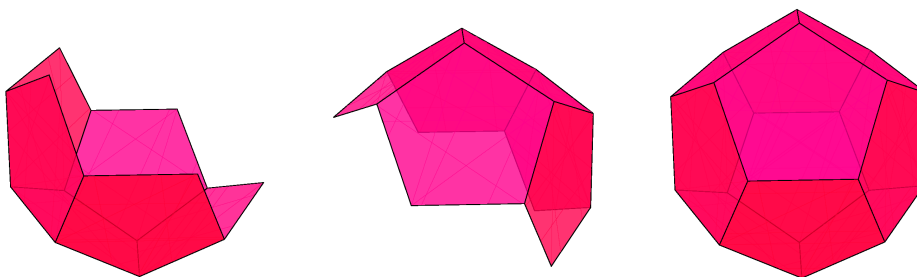
Slika 7: Konstrukcija ikozaedra

U tablici 1 navodimo Platonova tijela zajedno sa značenjima koja im je Platon pridao te osnovne podatke o njima. Pogledajmo na primjeru ikozaedra što predstavlja Schläflijev simbol te što su

Naziv	Element	Schläflijev simbol	N_0	N_1	N_2
Tetraedar	vatra	$\{3, 3\}$	4	6	4
Oktaedar	zrak	$\{3, 4\}$	6	12	8
Kocka	zemlja	$\{4, 3\}$	8	12	6
Ikozaedar	voda	$\{3, 5\}$	12	30	20
Dodekaedar	svemir	$\{5, 3\}$	20	30	12

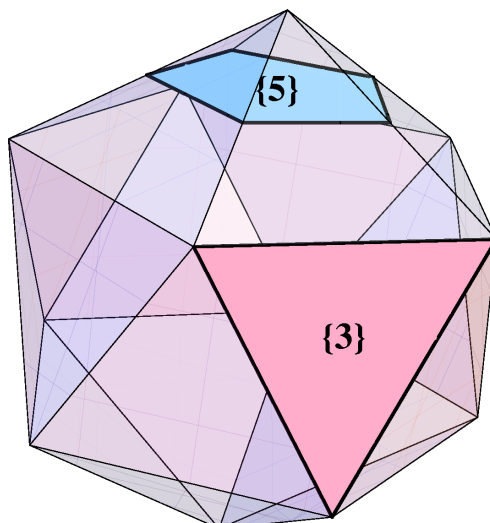
Tablica 1: Platonova tijela

pripadne vršne figure i ćelije. Schläflijev simbol ikozaedra je $\{3, 5\}$, što po definiciji znači da su ćelije trokuti (jasno, regularni), a vršne figure peterokuti (također regularni), kao što se može



Slika 8: Konstrukcija dodekaedra

uočiti na već prije spomenutoj slici 9.

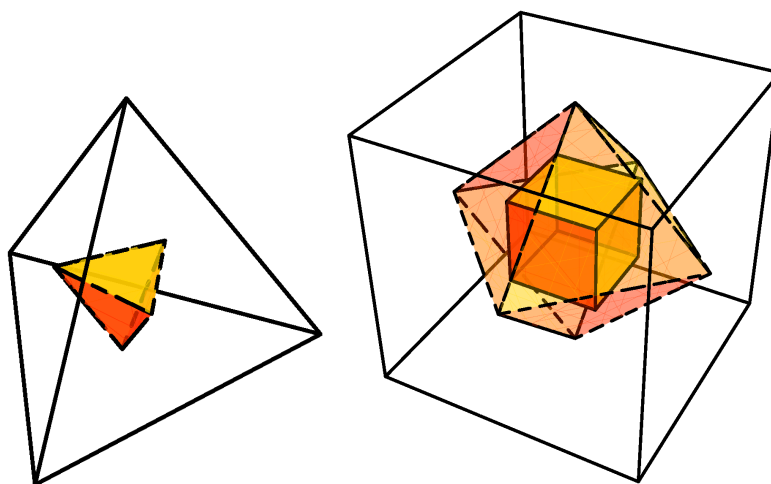


Slika 9: Schläflijev simbol na primjeru ikozaedra

Definicija 3.7. *Dualan poliedar poliedra π_3 je onaj poliedar čiji su vrhovi težišta ćelija poliedra π_3 .*

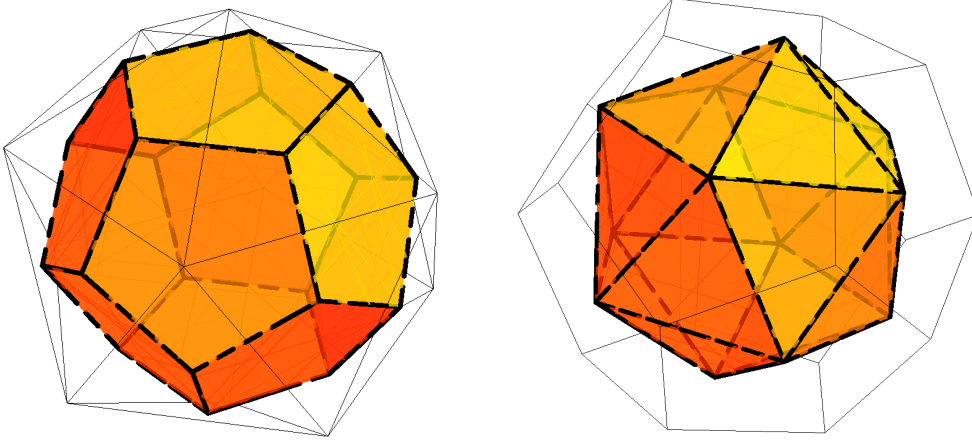
Definicija 3.8. *Okrnjen poliedar poliedra π_3 je onaj poliedar čije su ćelije vršne figure od π_3 i okrnjeni poligoni ćelija od π_3 .*

Na primjerima ćemo vidjeti što su to dualni i okrnjeni poliedri. Odmah je jasno da je tetraedar dualan sam sebi. Oktaedar i kocka su međusobno dualni te su isto tako dodekaedar i ikozaedar međusobno dualni. Navedeno možete vidjeti na slikama 10 i 11. Dualan poligon, odnosno poliedar, regularnog poligona, tj. poliedra je regularan. Primijetimo da je $\{p, q\}$ dualan s $\{q, p\}$ (analogno vrijedi i za više dimenzije).

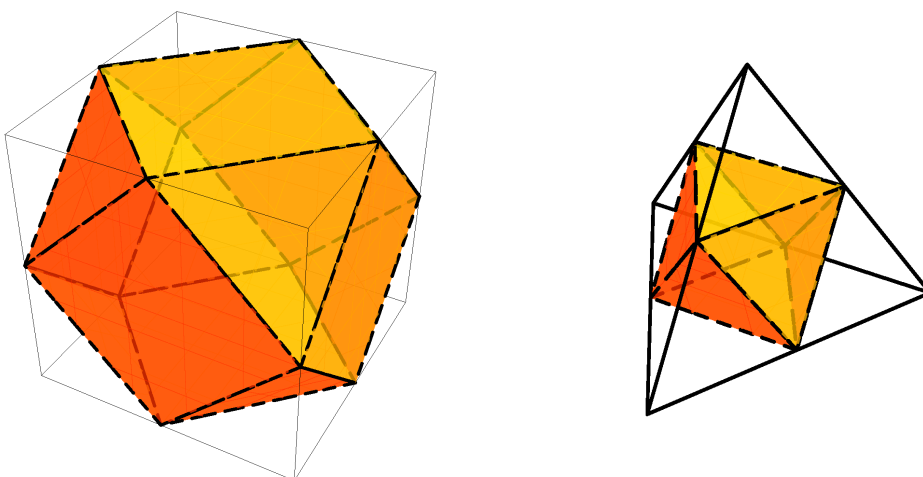


Slika 10: Dual tetraedra & dualnost $\{3, 4\} \leftrightarrow \{4, 3\}$

Iz definicije je jasno, uz gornju napomenu, da je okrnjen poligon regularnog poligona regularan. No, okrnjen poliedar regularnog poliedra ne mora nužno biti regularan. Npr. strane okrnjene kocke su trokuti – kao vršne figure kocke, i kvadrati – okrnjeni poligoni strana kocke. Takvo tijelo ne može biti regularno. S druge strane, okrnjen tetraedar je oktaedar. Slika 12 zornije ilustrira navedeno.



Slika 11: Dualnost ikozaedra i dodekaedra



Slika 12: Okrnjena kocka & okrnjen tetraedar

Kako bismo se na adekvatan način mogli pozabaviti manje intuitivnim četvrtom i višim dimenzijama, u sljedećem poglavlju navodimo potrebne pojmove.

4 ... generalizacijom...

Definicija 4.1. Za skup točaka S u n -dimenzionalnom prostoru kažemo da je **konveksan** ako za svake dvije točke $x, y \in S$ vrijedi $[x, y] \subseteq S$, pri čemu je $[x, y] = \{y + (x - y)\lambda \mid \lambda \in [0, 1]\}$.

Definicija 4.2. Za skup točaka $S \subseteq E^n$ definiramo njegov **konveksan zatvarač** \bar{S} kao presjek svih konveksnih nadskupova od S :

$$\bar{S} = \bigcap_{\substack{S \subseteq \mathcal{K} \\ \mathcal{K} \text{ konveksan}}} \mathcal{K}.$$

Napomena 4.3. Presjek konveksnih skupova je konveksan skup pa je i konveksan zatvarač konveksan. Primijetimo da je konveksan zatvarač najmanji konveksan skup koji sadržava polazni skup.

Definicija 4.4. Neka su $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Skup svih točaka n -dimenzionalnog prostora koje zadovoljavaju jednakost

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = a_0$$

nazivamo **hiperravninom**.

Napomena 4.5. Za $n = 2$ uobičajen naziv je pravac, a za $n = 3$ jednostavno ravnina.

Definicija 4.6. **Politop** je ograničeno konveksno područje n -dimenzionalnog prostora omeđeno s konačno mnogo hiperravnina. Neprazan presjek politopa i hiperravnine nazivamo **ćelijom**.

Uočimo da je ćelija n -dimenzionalnog politopa $(n - 1)$ -dimenzionalni politop.

Napomena 4.7. Politop za $n = 2$ je poligon, a za $n = 3$ je poliedar.

Definicija 4.8. **Vršna figura** vrha V politopa π_n u n -dimenzionalnom prostoru je $(n - 1)$ -dimenzionalni politop čiji su vrhovi ona polovišta bridova politopa π_n koji su incidentni s vrhom V .

Definicija 4.9. Neka je $\pi_k^1, \pi_k^2, \dots, \pi_k^{n_k}$ proizvoljan odabir k -dimenzionalnih politopa. Formalnu sumu

$$\sum_{j=1}^{n_k} x_j \pi_k^j,$$

gdje je svaki $x_j \in \{0, 1\}$, nazivamo **k -lancem**. Suma ćelija π_k je k -lanac koji nazivamo **rub politopa** π_{k+1} .

Za dva k -lanca $\sum_{j=1}^{n_k} x_j \pi_k^j$, $\sum_{j=1}^{m_k} y_j \lambda_k^j$ definiramo njihovu sumu kao lanac $\sum_{j=1}^M z_j \mu_k^j$, gdje je $M = \max\{n_k, m_k\}$. Nadalje je

$$\mu_k^j \in \Pi \cup \Lambda, \quad \Pi = \{\pi_k^j \mid 1 \leq j \leq n_k\}, \quad \Lambda = \{\lambda_k^j \mid 1 \leq j \leq m_k\}.$$

Neka su indeksi l_1 i l_2 takvi da je $\mu_k^j = \pi_k^{l_1} = \lambda_k^{l_2}$. Ako takvi ne postoje, stavimo $x_{l_1} = 0$ odnosno $y_{l_2} = 0$. Za koeficijente z_j vrijedi

$$z_j = 0 \iff x_{l_1} = y_{l_2}.$$

Rub k -lanca stoga možemo definirati kao sumu rubova politopa koji čine taj lanac. Jasno je da će tada rub politopa π_{k+1} biti k -lanac čiji rubni $(k - 1)$ -lanac „nestaje” (svi koeficijenti x_j iz definicije su 0). Takav k -lanac nazivamo **k - mreža**.

Definicija 4.10. *Jednostavno povezan* politop π_n je onaj čija je svaka k -mreža rub nekog $(k + 1)$ -lanca.

Definicija 4.11. *Kažemo da je* politop $\pi_n, n > 2$ **regularan** ako su njegove ćelije i vršne figure regularne.

Napomena 4.12. *Regularan politop je jednostavno povezan.*

Očito je da su sve ćelije regularnog politopa sukladne, a može se pokazati da isto vrijedi i za vršne figure.

Definicija 4.13. *Neka je dan politop π_n s k $(n - 1)$ -dimenzionalnih ćelija. Označimo li s T_1, \dots, T_k težišta tih ćelija, tada je sljedećom relacijom definiran njemu **dualan politop** $\bar{\pi}_n$:*

$$\bar{\pi}_n = \overline{\{T_1, \dots, T_k\}}.$$

Definicija 4.14. ***Okrnjen politop** politopa $\pi_n, n > 2$ je onaj čiji rub čine vršne figure od π_n te okrnjeni politopi koji čine rub od π_n .*

Schläflijev simbol regularnog politopa π_n u n -dimenzionalnom prostoru, $n > 2$, označavamo s $\{m_1, \dots, m_{n-1}\}$, pri čemu je $\{m_1, \dots, m_{n-2}\}$ ćelija od π_n , a $\{m_2, \dots, m_{n-1}\}$ njegova vršna figura.

5 ... u nepoznato

Proučavanje objekata u četvrtoj dimenziji ponajviše se temelji na intuiciji i na dimenzionalnoj analogiji. Ovim malim osvrtom pokušat ćemo razotkriti neke „tajne“ ovog prostora.

Napomena 5.1. U četverodimenzionalnom politopu vršne figure i ćelije su poliedri.

Analogno slučaju $n = 3$ i ovdje ćemo s N_k označavati broj k -ćelija politopa.

Teorem 5.2. Za jednostavno povezane četverodimenzionalne politope vrijedi

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0.$$

Dokaz. Direktna posljedica teorema 6.1. □

Napomena 5.3. Alternativni dokaz čitatelj može pronaći u [2], str. 150.

Teorem 5.4. Postoji 6 regularnih četverodimenzionalnih politopa do na sličnost.

Gore navedeni teorem nećemo dokazivati, budući da je sam dokaz vrlo složen i nije bitan za daljnja razmatranja koja ćemo provesti. Zainteresirani čitatelj dokaz može vidjeti u [3, teorem 4.6.1., str. 65.–69.].

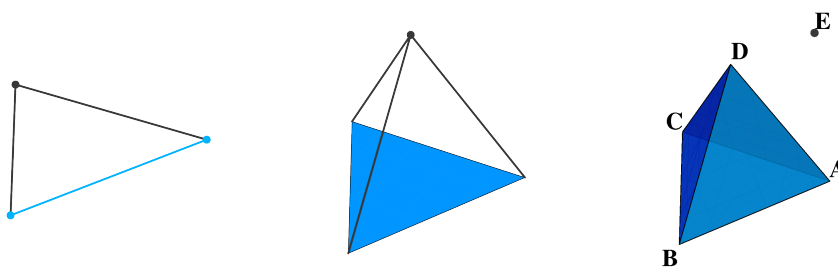
U tablici 2 navodimo broj k -ćelija regularnih četverodimenzionalnih politopa.

Naziv	Schläflijev simbol	N_0	N_1	N_2	N_3
α_4 (5-ćelija)	{3, 3, 3}	5	10	10	5
β_4 (16-ćelija)	{3, 3, 4}	8	24	32	16
γ_4 (8-ćelija)	{4, 3, 3}	16	32	24	8
24-ćelije	{3, 4, 3}	24	96	96	24
120-ćelija	{3, 3, 5}	600	1200	720	120
600-ćelija	{5, 3, 3}	120	720	1200	600

Tablica 2: 6 regularnih 4-dimenzionalnih politopa

Pomnije ćemo proučiti konstrukciju α_4, β_4 i γ_4 zato što su njihove generalizacije jedini regularni politopi u većim dimenzijama.

- Konstrukciju provodimo u tri koraka. Neka je dana dužina u ravnini - po definiciji je to α_1 . U sljedećem koraku odabiremo točku tako da ona uz α_1 čini jednakostraničan trokut. Na taj smo način dobili α_2 . Nadalje, α_3 dobivamo odabirom točke u prostoru tako da je ona vrh tetraedra s bazom α_2 . Sada je jasno da, u četvrtoj dimenziji, uz prikladan odabir točke, dobivamo α_4 . Navedena konstrukcija prikazana je na slici 13. Navodimo 0, 1, 2 i

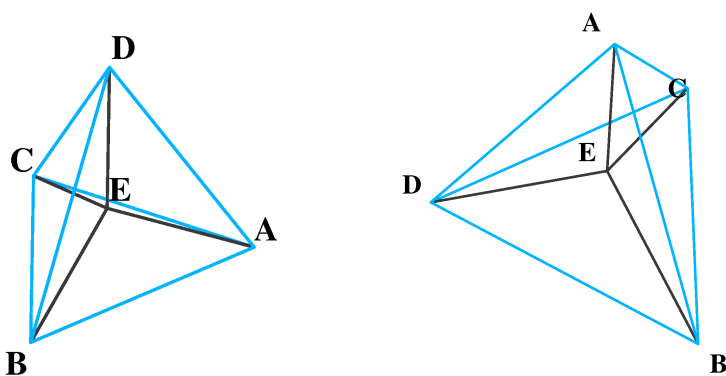


Slika 13: $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 \Rightarrow \alpha_4$

3–dimenzionalne ćelije politopa α_4 uz gore navedene oznake. Napomenimo da je svaka 3–dimenzionalna ćelija tetraedar, 2–dimenzionalna jednakostraničan trokut i imajmo pritom na umu da je α_4 konveksan.

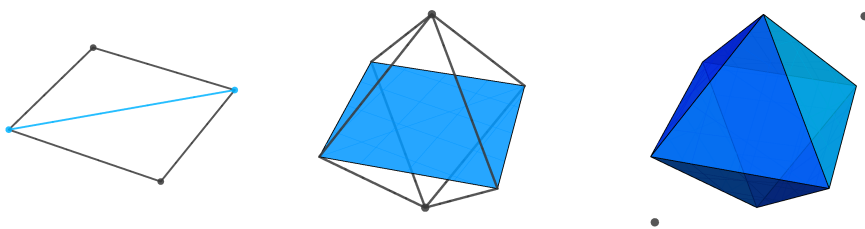
$$\begin{aligned} N_0 &= \{A, B, C, D, E\}, \\ N_1 &= \{AB, BC, CA, DA, DB, DC, EA, EB, EC, ED\} \\ N_2 &= \{ABC, ABD, BCD, ACD, EAB, EBC, ECA, EDA, EDB, EDC\}, \\ N_3 &= \{ABCD, EABC, EABD, EB CD, EACD\}. \end{aligned}$$

Na slici 14 donosimo prikaz α_4 .



Slika 14: α_4

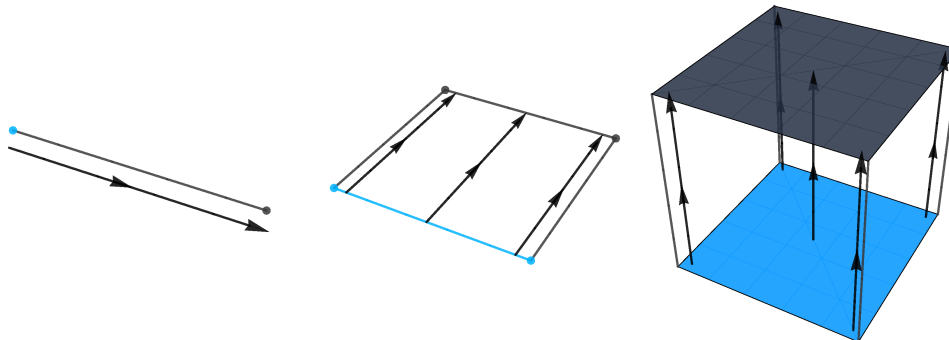
2. Svaki od koraka konstrukcije β_4 sastoji se od odabira odgovarajućih dviju točaka. Konstrukciju započinjemo tako da uzmemo dvije proizvoljne točke u ravni. Dana dužina je β_1 . Da bismo dobili β_2 , potrebno je izabrati točke takve da je β_1 dijagonala kvadrata kojem su dva vrha odabrane točke. β_2 leži u ravni koja dijeli prostor na dva dijela. Iz svakog od tih dijelova odabiremo točku takvu da je ona vrh pravilne četverostrane piramide čija je baza β_2 . Jasno je da smo ovime dobili oktaedar – β_3 . β_4 jest generalizacija oktaedra (kao što je α_4 generalizacija tetraedra) te se dobiva analognim postupkom, samo u višoj dimenziji. Dakle, β_3 leži u prostoru $E^3 < E^4$ te dijeli E^4 na 2 dijela iz kojih odabiremo po jednu točku. Svaka ćelija oktaedra zajedno s novoodabranom točkom čini



Slika 15: $\beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \beta_3 \Rightarrow \beta_4$

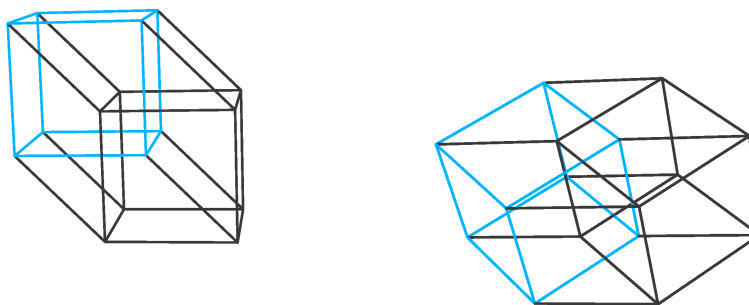
tetraedar – ćeliju politopa β_4 pa β_4 ima $2 \cdot 8 = 16$ ćelija.

3. Sljedeća na redu je konstrukcija γ_4 . Pokazat ćemo kako iz točke nizom elementarnih transformacija, preko dužine i kvadrata, dolazimo do kocke. Danu točku (γ_0) „razvučemo” duž proizvoljnog pravca. Dobivenu dužinu (γ_1) „razvučemo” po drugoj dimenziji ne bismo li dobili kvadrat (γ_2) koji potom „razvučemo” po trećoj dimenziji. Na taj način dolazimo do kocke (γ_3), što možete vidjeti na slici 16. Probajte zamisliti što se događa kada kocku „razvlačimo” po četvrtoj dimenziji - rezultat je γ_4 . Na slici 17 probajte uočiti



Slika 16: $\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \gamma_3$

8 paralelepipeda. U 4D to su, jasno, kocke.



Slika 17: γ_4

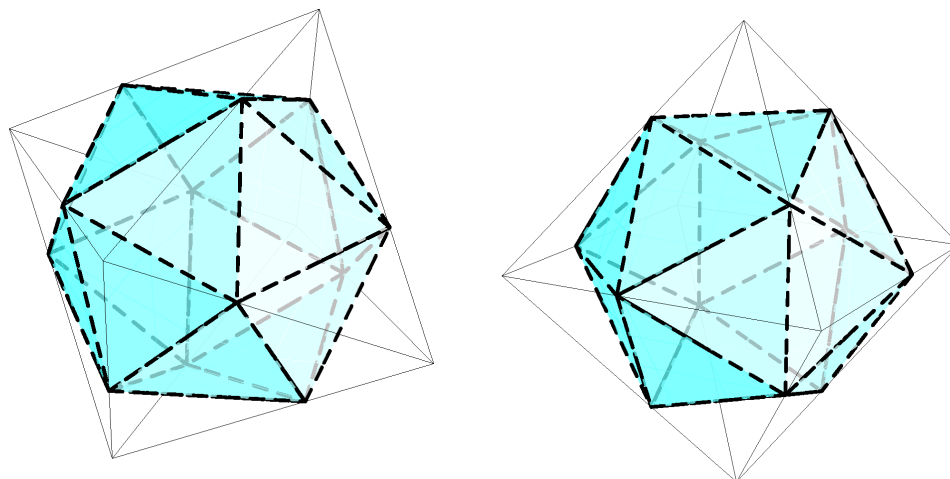
Konstrukcije preostalih triju politopa nešto su složenije i manje intuitivne pa o njima govorimo u kratkim natuknicama bez dokaza. Zainteresirani čitatelj dokaze može pronaći u [3, str. 46.–48., str. 61.–63.].

4. Krenimo redom: 24-ćelije je okrnjen β_4 . Naime, β_4 ima šesnaest 3-ćelija. Iz Schläflijeva simbola vidimo da je riječ o tetraedrima. Kako smo prije pokazali, okrnjeni tetraedar je oktaedar, baš kao i vršna figura politopa β_4 . Budući da β_4 ima 8 vrhova, ima 8 vršnih figura – ponovno je riječ o oktaedrima. Dakle, imamo 24 regularna poliedra. To su upravo 3-ćelije politopa koji konstruiramo. No, da bismo pokazali da je ovako dobiven politop regularan, preostaje pokazati regularnost vršnih figura. Strane vršnih figura 24-ćelije su vršne figure oktaedara pa je jasno da su to kvadrati. Svaki vrh vršne figure zajednički je za tri kvadrata (svaki brid 24-ćelije zajednički je za tri ćelije) pa je polovište zajedničko za tri strane. Zaključujemo da su vršne figure kocke.
5. Konstrukciju 600-ćelija provodimo preko 24-ćelija. Okrnjen 24-ćelije nije regularan, no „malim trikom” možemo doći do regularnog politopa. Naime, okrnjen politop nekog

politopa je konveksan zatvarač skupa polovišta bridova početnog politopa. U našem je slučaju korisno stranice podijeliti u omjeru $(\sqrt{5} + 1) / 2$. Na taj način okrnjeni oktaedri postaju ikozaedri. Kvadrati, kao vršne figure oktaedra, više ne leže u istoj ravnini, te ih možemo promatrati kao dva trokuta. Analitički se, poznavajući koordinate oktaedra, lako pokazuje da upravo omjer zlatnog reza osigurava regularnost tako dobivenog poliedra. Konveksan zatvarač skupa tako dobivenih točaka je neregularan politop koji se u literaturi označava sa $s\{3, 4, 3\}$. Trodimenzionalne ćelije tog politopa čini 120 tetraedara i 24 ikozaedra. Na svakom ikozaedru preostaje konstruirati četverodimenzionalnu piramidu čija je baza upravo dani ikozaedar, a strane 20 regularnih tetraedara. Dobivamo $120 + 24 \cdot 20 = 600$ tetraedara – trodimenzionalne ćelije politopa koji konstruiramo.

6. 120-ćelija je dualan 600-ćelija.

Na sljedećoj se slici može vidjeti kako iz oktaedra, uz prikladan odabir omjera kojim dijelimo stranice i prikladnu orijentaciju, dobivamo ikozaedar.



Slika 18: „Okrnjen” oktaedar

6 Veće dimenzije

Predmet proučavanja ovog poglavlja su n -dimenzionalni politopi za $n \geq 5$. Slijedi već spomenuta Euler–Poincaréova formula:

Teorem 6.1. *Za jednostavno povezan n -dimenzionalni politop π_n vrijedi*

$$N_{n-1} - N_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} N_0 + (-1)^n = 1.$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Označimo s

$$\phi_n := N_{n-1} - N_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} N_0 + (-1)^n.$$

Za $n = 2$ tvrdnja očito vrijedi (broj vrhova i bridova je jednak), a za $n = 3$ ekvivalentna je Eulerovu teoremu. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki politop dimenzije $d \leq n - 1$. Kao i kod Eulerova teorema, promatramo konstrukciju politopa π_n koji dobivamo spajanjem niza $(n - 1)$ -dimenzionalnih politopa.

U prvom koraku konstrukcije imamo jedan π_{n-1} , stoga je $N_{n-1} = 1$ (upravo on sam), a

$$N_{n-2} - N_{n-3} + \dots + (-1)^{n-2} N_0 + (-1)^{n-1} = 1$$

vrijedi po pretpostavci indukcije pa je $\phi_n = 0$.

Dodajemo sljedeći π_{n-1} takav da ima neprazan $(n - 2)$ -dimenzionalni presjek s dosadašnjom konstrukcijom. Neka taj presjek čini N'_k k -dimenzionalnih ćelija, $k = 0, 1, \dots, n - 3$. Vrijedi

$$N'_{n-3} - N'_{n-4} + \dots + (-1)^{n-3} N'_0 = 1 - (-1)^{n-2} =: \phi'_{n-2}.$$

Za dodani politop vrijedi

$$N''_{n-2} - N''_{n-3} + \dots + (-1)^{n-2} N''_0 = 1 - (-1)^{n-1} =: \phi''_{n-1}.$$

Dakle, doprinos dodanog politopa u sumi $N_{n-1} - \phi_n$ iznosi $\phi''_{n-1} + \phi'_{n-2} - 1 = 1$ zbog čega su suma

$$N_{n-2} - N_{n-3} + \dots + (-1)^{n-2} N_0$$

i N_{n-1} uvećani za 1. Stoga je jasno da je $\phi_n = 0$.

Doprinos zadnje dodanog politopa π_{n-1} u sumi

$$N_{n-2} - N_{n-3} + \dots + (-1)^{n-2} N_0$$

je očito 0, dok je za N_{n-1} jednak 1. Time je dokaz teorema završen. \square

Višedimezionalni prostori siromašniji su regularnim politopima, što možemo uočiti iz sljedećeg teorema.

Teorem 6.2. *Postoje 3 regularna n -dimenzionalna ($n \geq 5$) politopa do na sličnost.*

Politopi o kojima govori prethodni teorem su regularan n -simpleks (α_n), n -dimenzionalni oktaedar (β_n) i n -dimenzionalna kocka (γ_n) koji su, kao što se da uočiti iz njihovih naziva, generalizacije tetraedra, oktaedra i kocke respektivno te su njihove konstrukcije analogne opisanima u prethodnom poglavlju.

Promatrajmo regularan n -simpleks. Iz konstrukcije se vidi da je broj vrhova

$N_0 = n + 1$, a budući da svaka dva vrha čine jedan brid, broj bridova je $N_1 = \binom{n+1}{2}$. Broj

strana je $N_2 = \binom{n+1}{3}$ – svaka tri vrha čine jednu stranu. Vidimo da općenito vrijedi da je broj k -ćelija

$$N_k = \binom{n+1}{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Primijetimo da zaista vrijedi teorem 6.1:

$$\begin{aligned} \phi_n &= N_{n-1} - N_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} N_0 + (-1)^n \\ &= \binom{n+1}{n} - \binom{n+1}{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n+1}{1} + (-1)^n \\ &= \binom{n+1}{n+1} - \left[\binom{n+1}{n+1} - \binom{n+1}{n} + \dots + (-1)^n \binom{n+1}{1} + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{0} \right] \\ &= 1 - (1-1)^{n+1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Na red dolazi β_n . Označimo li s N_k broj k -ćelija od β_n i s N'_k broj k -ćelija od β_{n-1} – iz kojeg konstruiramo β_n , vrijedi:

$$\begin{aligned} N_0 &\stackrel{(1)}{=} N'_0 + 2 \\ N_1 &\stackrel{(2)}{=} N'_1 + 2N'_0 \\ N_2 &\stackrel{(3)}{=} N'_2 + 2N'_1 \\ &\vdots \\ N_{k-1} &\stackrel{(k)}{=} N'_{k-1} + 2N'_{k-2} \\ &\vdots \\ N_{n-1} &= N'_{n-1} + 2N'_{n-2}. \end{aligned}$$

Pri čemu:

- (1) dobivamo tako da dodajemo dvije točke,
- (2) očito vrijedi, naime, broj već postojećih bridova uvećavamo brojem novonastalih koje dobivamo tako da dodane točke spojimo sa svim vrhovima politopa β_{n-1} . Isto tako za
- (3) broj 2-ćelija povećan je za dvostruki broj bridova zato što svaki brid u β_{n-1} čini 2-ćeliju s jednom od dodanih točaka. Jasno za
- (k) zaključujemo analogno.

Indukcijom po dimenziji prostora pokazujemo da vrijedi

$$N_k = 2^{k+1} \binom{n}{k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Za bazu uzmimo $n = 1, k = 0$. Budući da dužina ima dvije krajnje točke, vrijedi $N_0 = 2$, što je u skladu s tvrdnjom. Pretpostavimo da relacija vrijedi u $(n-1)$ -voj dimenziji. Neka je

$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ proizvoljan. Tada je:

$$\begin{aligned}
 N_k &= N'_k + 2N'_{k-1} \\
 &= 2^{k+1} \binom{n-1}{k+1} + 2 \cdot 2^k \binom{n-1}{k} \\
 &= 2^{k+1} \left[\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k} \right] \\
 &= 2^{k+1} \binom{n}{k+1}.
 \end{aligned}$$

Pokažimo da za β_n vrijedi generalizacija Eulerove formule:

$$\begin{aligned}
 \phi_n &= N_{n-1} - N_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} N_0 + (-1)^n \\
 &= 2^n \binom{n}{n} - 2^{n-1} \binom{n}{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} 2^1 \binom{n}{1} + (-1)^n \\
 &= (2-1)^n \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Za kraj promotrimo poopćenje kocke. Iz konstrukcije je očito da o γ_n možemo razmišljati kao o „prizmi“ čije su baze dva sukladna γ_{n-1} . Označimo s N_k broj k -ćelija u γ_n i s N'_k broj k -ćelija u γ_{n-1} . Vrhove od γ_n čine vrhovi dviju baza, stoga je $N_0 = 2N'_0$. Bridovi od γ_n su bridovi dviju baza i bridovi koji spajaju odgovarajuće vrhove baza pa vrijedi jednakost $N_1 = 2N'_1 + N'_0$. Općenito, k -ćeliju od γ_n čine ćelije dviju baza i k -ćelije koje nastaju spajanjem odgovarajućih $(k-1)$ -ćelija baza. Stoga vrijedi

$$N_k = 2N'_k + N'_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Indukcijom se lako pokaže da je onda

$$N_k = 2^{n-k} \binom{n}{k}, \quad 0 \leq k < n.$$

Tvrđnja teorema 6.1 istinita je i za γ_n . To nas ne čudi, budući da je to jednostavno povezan politop:

$$\begin{aligned}
 \phi_n - (-1)^n &= (-1)^{n-1} [(2-1)^n - (-1)^n] \\
 \phi_n &= (-1)^n + (-1)^{n-1} + 1 \\
 \phi_n &= 1.
 \end{aligned}$$

Tabelirajmo dosadašnje rezultate:

Naziv	Schläflijev simbol	N_0	N_k	N_{n-1}
α_n	$\{3^{n-1}\}$	$n+1$	$\binom{n+1}{k+1}$	$n+1$
β_n	$\{3^{n-2}, 4\}$	$2n$	$2^{k+1} \binom{n}{k+1}$	2^n
γ_n	$\{4, 3^{n-2}\}$	2^n	$2^{n-k} \binom{n}{k}$	$2n$

Tablica 3: Regularni politopi

Literatura

- [1] Coxeter, H. S. M.: *Regular polytopes*, Methuen & Co Ltd., London, 1948
- [2] Sommerville, D. M. Y.: *An introduction to the geometry of n dimensions*, Dover Publications, Inc, New York, 1958
- [3] Favro, P.; Zucco, A.: *Appunti di Geometria Convessa*, skripta, Università di Torino
- [4] Zucco, A.: Poligoni, poliedri e politopi regolari, *Matematicamente.it*, **123** (2009), 17.–24.