Diferenciranje i integriranje pod znakom integrala

Irfan Glogić *, Harun Šiljak†

> When guys at MIT or Princeton had trouble doing a certain integral, it was because they couldn't do it with the standard methods they had learned in school. If it was contour integration, they would have found it; if it was a simple series expansion, they would have found it. Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. ([1])

1 Teorijski uvod

Diferenciranje i integriranje pod znakom integrala je tehnika koja je često korisna u izračunavanju integrala funkcija jedne realne varijable. Prije nego što krenemo s primjerima, navedimo osnovne teoreme kojima ćemo se koristiti.

Teorem 1. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definirana na pravokutniku $[a,b]\times[c,d]$ i neka je neprekidna po x na $[a,b]$ za proizvoljan y. Pretpostavimo također da postoji parcijalna derivacija $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ i da je neprekidna kao funkcija dviju varijabli. Tada za svaki $y\in[c,d]$ vrijedi*

$$\frac{d}{dy}\Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx.$$

Što se tiče diferenciranja pod znakom integrala koji je neodređen, osobitu ulogu ima pojam uniformne konvergencije integrala.

Naime, ako postoji integral $I(y)=\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ (definiran kao $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x,y)dx$) za $y\in Y$ i za svaki $\varepsilon>0$ postoji $b_0\geq a$ koji ne ovisi o y, takav da za $b>b_0$ vrijedi

$$\left|\int_a^\infty f(x,y)\,dx-\int_a^b f(x,y)\,dx\right|=\left|\int_b^\infty f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon \text{ za sve } y\in Y,$$

*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, BiH

†Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Sarajevu, BiH

tada kažemo da integral $I(y)$ *konvergira uniformno po* $y \in Y$.

Za dokazivanje uniformne konvergencije integrala koriste se razni kriteriji. Mi ćemo navesti dva.

Kriterij 1. Pretpostavimo da je funkcija $f(x, y)$ integrabilna po x na svakom konačnom segmentu $[a, \eta]$ $(\eta \geq a)$. Ako postoji funkcija $\varphi(x)$ koja ovisi samo o x, integrabilna na $[a, \infty\rangle$ takva da za svaki $y \in Y$ vrijedi $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$ (za $x \geq a$), onda integral $I(y)$ konvergira uniformno po y.

Kriterij 2. Ako je integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$ konvergentan, a funkcija $g(x, y)$ monotona po x i uniformno ograničena, onda integral $\int_a^\infty f(x) g(x, y)\, dx$ konvergira uniformno po y.

Sljedeći teorem daje dovoljne uvjete za prijelaz limesa pod znak integrala.

Teorem 2. *Neka je funkcija $f(x, y)$ za $y \in Y$ integrabilna po x na segmentu $[a, A]$ za sve $A > a$ i neka na svakom segmentu konvergira uniformno po x graničnoj funkciji $\varphi(x)$ kada $y \to y_0$. Ako pored toga integral $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$ konvergira uniformno po $y \in Y$, onda vrijedi*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty \varphi(x)\, dx,$$

gdje y_0 može biti i ∞.

Što se tiče diferenciranja pod znakom neodređenog integrala, pokazuje se da i u ovom slučaju vrijedi *Leibnizovo pravilo.*

Teorem 3. *Neka je funkcija $f(x, y)$ definirana i neprekidna po x za $x \geq a$ i y iz segmenta $[c, d]$ te neka za $x \geq 0$ i $y \in [c, d]$ ima derivaciju $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ koja je neprekidna funkcija po obje varijable. Pretpostavimo također da integral $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$ konvergira za sve $y \in [c, d]$, a integral $\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx$ konvergira uniformno po y na tom istom segmentu. Tada za proizvoljni $y \in [c, d]$ vrijedi*

$$I'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx.$$

Za potrebe integracije pod znakom integrala navodimo sljedeće teoreme.

Teorem 4. *Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekidna na pravokutniku $[a, b] \times [c, d]$, tada vrijedi*

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

Teorem 5. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definirana i neprekidna za $x \geq a$ i $y \in [c,d]$. Ako integral $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ konvergira uniformno po y na segmentu $[c,d]$, tada vrijedi*

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \int_a^\infty f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^\infty \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Teorem 6. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definirana i neprekidna za $x \geq a$ i $y \geq c$. Pretpostavimo također da oba integrala $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ i $\int_c^\infty f(x,y)\,dy$ konvergiraju uniformno, prvi po y, a drugi po x. Tada, ako postoji bar jedan od integrala $\int_c^\infty \int_a^\infty |f(x,y)|\,dx\,dy$ i $\int_a^\infty \int_c^\infty |f(x,y)|\,dy\,dx$, onda postoje i jednaki su integrali*

$$\int_c^\infty \int_a^\infty f(x,y)\,dx\,dy \ \text{ i } \int_a^\infty \int_c^\infty f(x,y)\,dy\,dx.$$

Dokazi navedenih tvrdnji lako se mogu izvesti iz rezultata iz naprimjer [2, 3].

2 Riješeni primjeri

U sljedećim primjerima prikazana je primjena diferenciranja i integriranja pod znakom integrala. Pritom su neki zadaci detaljno riješeni dok su ponegdje dijelovi rješenja ostali neprikazani - čitatelju se savjetuje da sam pokuša napraviti potrebne dopune.

Ako nije naveden izvor zadatka, on je zajedno s rješenjem preuzet iz [3].

Primjer 1 ([4])**.** Nađite vrijednost integrala

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $f(x,t) = \frac{\ln(xt+1)}{x^2+1}$. Ova funkcija neprekidna je na pravokutniku $P = [0,1]\times[0,1]$ i parcijalna derivacija $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \frac{x}{(xt+1)(x^2+1)}$ postoji i neprekidna je na P. Tada prema Teoremu 1 za svaki $t \in [0,1]$ i $I(t) = \int_0^1 f(x,t)\,dx$ vrijedi $I'(t) = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(xt+1)(x^2+1)}$. Rastavljanjem na parcijalne razlomke i integracijom dobijamo

$$I'(t) = \frac{2t \operatorname{arctg} x - 2\ln(tx+1) + \ln(x^2+1)}{2(t^2+1)}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi t + 2\ln 2 - 4\ln(t+1)}{4(t^2+1)}.$$

Odavde slijedi da je

$$I(t) = \frac{\ln 2 \operatorname{arctg} t}{2} + \frac{\pi \ln(t^2+1)}{8} - \int_0^t \frac{\ln(t+1)}{t^2+1} dt,$$

pa je

$$I(1) = \frac{\pi \ln 2}{4} - \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1} dt.$$

Kako je integral na desnoj strani jednakosti upravo traženi integral $I(1)$, to slijedi da je tražena vrijednost $f(1) = \frac{\pi \ln 2}{8}$. $\square$

Primjer 2 ([5])**.** Nađite vrijednost integrala

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \pi x - \operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

Dokaz. Neka je $f(x,t) = \frac{\operatorname{arctg} tx - \operatorname{arctg} x}{x}$. Ova funkcija je neprekidna za $x \geq 0$ i $t \in [1, \pi]$, pri čemu je na istom skupu neprekidna i derivacija $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \frac{1}{1+t^2x^2}$. Integral $I(t) = \int_0^\infty f(x,t)\, dx$ konvergira za sve $t \in [1, \pi]$, što je moguće pokazati npr. Lagrangeovim teoremom o srednjoj vrijednosti, jer iz njega slijedi da za $t > 1$ vrijedi

$$\frac{\operatorname{arctg} tx - \operatorname{arctg} x}{x(t-1)} = (\operatorname{arctg} x)'_{x=c},$$

gdje je c neki broj iz segmenta $[x, tx]$, pa imamo

$$\frac{\operatorname{arctg} tx - \operatorname{arctg} x}{x(t-1)} = \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Odavde je konvergencija integrala očita. Sada možemo, koristeći se Kriterijem 1, pokazati da $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, dx$ konvergira uniformno po t, jer je $\frac{1}{1+t^2x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ za $t \geq 1$. Tada prema Teoremu 3 vrijedi

$$I'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} \left(\frac{x}{1+t^2x^2} \right) dx = \frac{1}{t} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2t}.$$

Stoga je $I(t) = \frac{\pi}{2} \ln t + C$. Budući da je $I(1) = 0$, slijedi $C = 0$. Dakle, $I(\pi) = \frac{\pi}{2} \ln \pi$. $\square$

Primjer 3. Nađite vrijednost integrala

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Dokaz. Neka je $f(x,t) = \frac{\sin x}{x} e^{-tx}$. Ova funkcija je neprekidna na $P = [0, \infty\rangle \times [0, a]$ za svako $a > 0$, pri čemu je na istom skupu neprekidna i derivacija $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -\sin x\, e^{-tx}$. Integral $I(t) = \int_0^\infty f(x,t)\, dx$ konvergira za svako t jer za $t = 0$ imamo

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx < \infty$ (posljednja nejednakost slijedi npr. iz Dirichletova kriterija konvergencije, jer $\left|\int_0^a \sin x\,dx\right| < 2$ za svaki a, dok $\frac{1}{x}$ monotono opada k nuli za $x > 0$), a za $t \geq t_0 > 0$ imamo $\left|\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\,dx\right| \leq \int_0^\infty e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t} < \infty$.

Za $t > 0$ vrijedi $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| = |-\sin x\, e^{-tx}| \leq e^{-tx} \leq e^{-t_0 x} = \varphi(x)$, a budući da je $\varphi(x)$ integrabilna na $[0,\infty\rangle$, po Kriteriju 1 integral $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$ konvergira uniformno na svakom skupu oblika $\{t \in \mathbb{R} | t \geq t_0 > 0\}$. Prema Teoremu 3 vrijedi

$$I'(t) = -\int_0^\infty \sin x\, e^{-tx}\,dx.$$

Primjenom parcijalne integracije dva puta dobijamo

$$I'(t) = -\frac{1}{1+t^2} \text{ za } t > 0.$$

Odatle slijedi da je $I(t) = -\operatorname{arctg} t + C$ za $t > 0$. Pokažimo da je $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i odaberimo $x_0 > 0$ takvav da je $\sin x \geq 0$ za $x \in [0, x_0]$ i

$$0 < \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\,dx < \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

za sve $t > 0$. Funkcija $f(x,t)$ je integrabilna na segmentu $[x_0, A]$ za svaki $A > x_0$ i na svakom takvom segmentu konvergira uniformno po x k 0 kada $t \to \infty$. Integral $\int_{x_0}^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\,dx$ konvergira uniformno po $t > 0$ (prema Kriteriju 2) pa koristeći se Teoremom 2 dobijamo $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$. Dakle, $C = \frac{\pi}{2}$, a vrijednost traženog integrala je $I(0) = \frac{\pi}{2}$.

Dokaz da je $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$ mogao je biti izveden i jednostavnije, kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru. □

Primjer 4. Dokažite jednakost

$$\int_0^\infty \frac{2 - 2\cos x}{x e^x}\,dx = \ln 2.$$

Dokaz. Neka je $f(x,t) = \frac{2-2\cos x}{xe^x} e^{-tx}$. Koristeći se idejama iz prethodnih zadataka, može se pokazati da integral $I(t) = \int_0^\infty f(x,t)\,dx$ konvergira za sve $t \in \{t \in \mathbb{R} | t_0 \leq t < \infty\}$ gdje je $0 < t_0 < 1$ te da na istom skupu integral $\int_0^\infty f(x,t)\,dx$ konvergira uniformno. Stoga prema Teoremu 3 imamo

$$I'(t) = \int_0^\infty f_t'(x,t)\,dx = \int_0^\infty (2 - 2\cos x) e^{-tx} dx = -\frac{2}{t} + \frac{2t}{t^2+1},$$

$$I(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) + C.$$

Primijetimo da je $\frac{2-2\cos x}{x}$ neprekidna ograničena funkcija na $[0,\infty\rangle$ i da je

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty e^{-tx}dx = 0.$$

Stoga je $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$, pa je $C = 0$. Dakle, traženi integral je $I(1) = \ln 2$. □

U nastavku slijede primjeri primjene integracije pod znakom integrala u rješavanju zadataka. Najprije ćemo ovu tehniku primijeniti na već dane primjere 2 i 4, a zatim i na jedan poznati rezultat iz analize.

Primjer 5 ([5])**.** Nađite vrijednost integrala

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\pi x - \operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$$

Dokaz.

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\pi x - \operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{x}\operatorname{arctg} tx\Big|_{t=1}^{t=\pi}dx = \int_0^\infty\int_1^\pi \frac{1}{1+(xt)^2}dt\,dx.$$

Budući da je $\frac{1}{1+(tx)^2}$ neprekidna funkcija za $x \geq 0$ i $t \in [1,\pi]$ i integral $\int_0^\infty \frac{1}{1+(tx)^2}dx$ prema Kriteriju 1 konvergira uniformno za svako $t \in [1,\pi]$, iz Teorema 5 slijedi opravdanost sljedećeg postupka:

$$I = \int_0^\infty\int_1^\pi \frac{1}{1+(xt)^2}dt\,dx = \int_1^\pi\int_0^\infty \frac{1}{1+(xt)^2}dx\,dt,$$

$$I = \int_1^\pi \frac{1}{t}\cdot\frac{\pi}{2}dt = \frac{\pi}{2}\ln\pi.$$

□

Primjer 6. Dokažite jednakost

$$\int_0^\infty \frac{2-2\cos x}{xe^x}\,dx = \ln 2.$$

Dokaz. Budući da je $\int_0^1 \sin xt\ dt = \frac{1-\cos x}{x}$, imamo

$$I = \int_0^\infty \frac{2-2\cos x}{x}\cdot e^{-x}dx = 2\int_0^\infty\int_0^1 \sin xt\ e^{-x}dt\ dx.$$

Budući da je $\sin xt\ e^{-x}$ neprekidna funkcija za $x \geq 0$ i $t \in [0,1]$ i integral $\int_0^\infty \sin xt\ e^{-x}\,dx$ konvergira uniformno za svako $t \in [0,1]$ po prvom kriteriju, iz Teorema 5 slijedi opravdanost sljedećeg postupka:

$$I = 2\int_0^1\int_0^\infty \sin xt\ e^{-x}dx\ dt = 2\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \ln 2.$$

□

Primjer 7. Nađite vrijednost integrala

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Dokaz. Iako ovo rješenje ne predstavlja klasičnu integraciju pod znakom integrala, ipak ga vrijedi prikazati.

Neka je $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Vrijedi

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \frac{I}{\sqrt{t}}.$$

Množenjem zadnje jednakosti s e^{-t} i integriranjem obiju strana na intervalu $[0, \infty\rangle$ dobijamo

$$2I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-tx^2} dx\; e^{-t} dt = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-tx^2} e^{-t} dt\; dx.$$

Promjena reda integriranja opravdana je prema Teoremu 6, budući da funkcija $e^{-t(x^2+1)}$ zadovoljava uvjete ovog teorema: uniformnu konvergenciju integrala $\int_0^\infty e^{-t(x^2+1)} dx$ i $\int_0^\infty e^{-t(x^2+1)} dt$ lako je pokazati, a egzistencija jednog od dva tražena uzastopna integrala slijedi iz sljedećeg računa:

$$2I^2 = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Prema tome je $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. $\square$

3 Zadaci za samostalan rad

Čitatelj može predstavljene metode primijeniti na sljedeće zadatke koji su ostavljeni za vježbu.

Zadatak 1. Dokažite jednakost

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+ax)}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} a \log(1+a^2).$$

Zadatak 2. Dokažite jednakost

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} dx = \frac{5\pi^2}{96}.$$

Zadatak 3. Nađite vrijednost integrala

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} \ln x \, dx$$

za $0 < p < 1$.

Zadatak 4. Dokažite jednakost

$$\int_0^\infty 2 \sec x \ln \left(\frac{1+\beta \cos x}{1+\alpha \cos x} \right) dx = \arccos^2 \alpha - \arccos^2 \beta.$$

Zadatak 5 ([6])**.** Dokažite jednakost

$$\int_0^\infty \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} - \frac{x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots \right) \left(1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots \right) dx = \sqrt{e}.$$

Zadatak 6. Nađite vrijednost integrala

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos nx}{(x^2+1)^2} dx.$$

Literatura

[1] Feynman, R. P., *Surely You're Joking, Mr. Feynman by Richard P. Feynman,* Bantam Books, 1989

[2] Pandžić, P., Tambača J., *Integrali funkcija više varijabli*, Sveučilišna skripta, Sveučilište u Zagrebu, http://web.math.hr/nastava/difraf/predavanja_int.html, 2011.

[3] Ungar Š., *Matematička analiza 3*, Sveučilište u Zagrebu, 2002.

[4] Mathlinks forum: http://www.mathlinks.ro

[5] Kedlaya, K. S., Ng, L., *Solutions to the 63rd William Lowell Putnam Mathematical Competition*, 2002

[6] Alexanderson G. L., Klosinski L. F., Larson L. C., *The William Lowell Putnam Mathematical Competition Problems and Solutions: 1965-1984*, MAA, 1985

[7] Kedlaya, K. S., Poonen B., Vakil R., *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000: Problems, Solutions, and Commentary*, MAA, 2002